

A Maxwell-féle villamos feszültségtenzor

Veszely

October 12, 2012

1 Rétegezett síkkondenzátorban fellépő (mechanikai) feszültségek

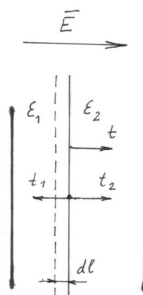


Figure 1: Keresztirányban rétegezett síkkondenzátor

Tekintsük a 1. ábrán látható keresztirányban rétegezett kondenzátort. Az elválasztó felületre ható erő kiszámításához az energiatétel alábbi alakját használjuk

$$dW + Fdl = UdQ, \quad (1)$$

ahol dW a villamos energia növekménye, Fdl a villamos térerősség által végzett munka, UdQ a forrás által végzett munka. Ha a határoló felület dl -el elmozdul jobbra, akkor a dl vastagságú réteg energiája $\frac{1}{2}\epsilon_2 E_2^2 dlA$ -ról $\frac{1}{2}\epsilon_1 E_1^2 dlA$ -ra változik. A villamos erőtér munkája $t dlA$, ahol t a felületegységre eső erőhatás, azaz a mechanikai feszültség vagy nyomás. Töltésváltozás nincs, mert a \mathbf{D} eltolási vektor nem változik. Az energia egyenlet

$$\frac{1}{2}\epsilon_1 E_1^2 dlA - \frac{1}{2}\epsilon_2 E_2^2 dlA + t dlA = 0, \quad (2)$$

ahonnan

$$t = \frac{1}{2}\epsilon_2 E_2^2 - \frac{1}{2}\epsilon_1 E_1^2. \quad (3)$$

Az 1. ábrán t -vel jelöltük az elválasztó felületre ható feszültség referencia irányát. Ez a feszültség úgy fogható fel, mint a határfelületre a dielektrikumok által gyakorolt feszültségek eredője. Ezeket a feszültségeket akkor vesszük pozitívnak, ha irányuk megegyezik a határfelülettől a dielektrikum belseje felé

mutató normális irányával. Legyen tehát

$$t_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_2 E_2^2, \quad (4)$$

és

$$t_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 E_1^2. \quad (5)$$

A t_2 és t_1 részfeszültségeket a (3) előjelei alapján jelöltük be az 1. ábrába. Mindkét részfeszültség az egyes dielektrikumok belseje felé igyekszik húzni a határoló felületet. Tehát t_1 és t_2 *húzó feszültségek*.

A (3) átírható úgy, hogy a közös D eltolási vektor szerepeljen benne

$$t = \frac{1}{2}D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad (6)$$

ahonnan következik, hogy $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ esetében az eredő feszültség pozitív, vagyis a nagyobb permittivitású anyagtól a kisebb permittivitású felé mutat.

Tekintsük most a 2. ábrán látható hosszirányban rétegezett kondenzátort. A lemezek távolsága l , a lemezek papírra merőleges mérete a . Ha a határoló felület dn -el elmozdul lefelé, akkor az (1) energia tétel

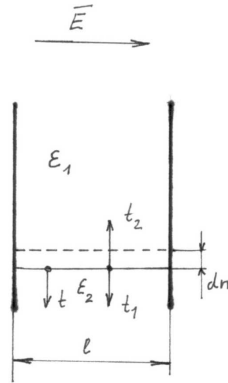


Figure 2: Hosszirányban rétegezett síkkondenzátor

$$ldna \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 E^2 \right) + tldna = U(\sigma_1 - \sigma_2)dna, \quad (7)$$

ahol figyelembe vettük, hogy a villamos térerősség a kétféle szigetelőben megegyezik és hogy az eltolási vektor $D_2 = \varepsilon_2 E$ -ről $D_1 = \varepsilon_1 E$ -re változása miatt a felületi töltéssűrűség $\sigma_2 = \varepsilon_2 E$ -ről $\sigma_1 = \varepsilon_1 E$ -re változik. Felhasználva még, hogy $U = El$ a fenti egyenletből az elválasztó felületre ható feszültség

$$t = \frac{1}{2}E^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (8)$$

ami az (4) és (5) alapján így is írható

$$t = t_1 - t_2, \quad (9)$$

aminek alapján a 2. ábrába berajzoltuk a dielektrikumok által a határfelületre ható feszültségeket. Láthatólag mindkét dielektrikum a saját peremére (ami egyben a közös határ) *nyomó feszültséget* gyakorol. Ha $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, akkor az eredő feszültség ismét a magasabb permittivitású dielektrikumtól az alacsonyabb permittivitású felé mutat.

Idáig úgy tűnt, hogy az előjel konvencióra (t.i. hogy a dielektrikum által létrehozott feszültséget akkor tekintjük pozitívnak, ha iránya megegyezik a dielektrikum belseje felé mutató felületi normálissal) nincs szükség. Meg kell azonban gondolnunk, hogy a dielektrikumra ható erőt úgy kapjuk, hogy a feszültségnek (vagy a feszültség tenzornak l. később) és a vektoros felületelemnek a szorzatát összegezzük a felületre. Ekkor egységes befelé mutató normálist választunk és így a nyomó feszültséget negatív előjellel kell figyelembe venni. A dielektrikum belseje felé mutató normálisra vonatkoztatott nyomófeszültségek tehát

$$t'_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon_2 E_2^2, \quad (10)$$

és

$$t'_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 E_1^2. \quad (11)$$

2 A feszültség tenzor

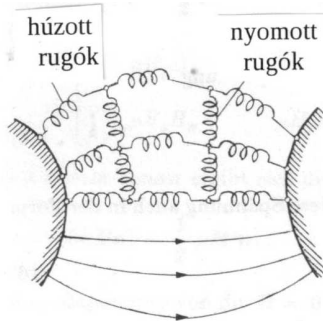


Figure 3: Az éter feszültségi állapotának szemléltetése rugókkal

Az elektrodinamika XIX. századi fejlődése során szükségesnek tartották, hogy a térnek valamilyen közeg hordozója legyen. Ezt a feltételezett közeget *éternek* nevezték. Faraday szerint az elektromágneses tér az éternek (mechanikai) feszültségi állapota. Ezt az állapotot rugókkal lehet jellemezni, éspedig az erővonalak irányába eső rugók *húzott* rugók, az erővonalakra merőleges rugók *nyomott* rugók, l. a 3. ábrát. A 4. és 5. ábrák az 1 és 2 ábrák feszültségi állapotának rugóval történő szemléltetései.

A rugalmasságtanban megszokott módon vágjunk most ki a szigetelőből egy kis hasábot, amelynek egyik éle párhuzamos az erővonalakkal, l. a 6. ábrát. Hogy a hasáb egyensúlyban maradjon, a szigetelő többi része által kifejtett erőket is feltüntettük az ábrán. A tér irányában tiszta húzó, arra merőleges síkban bármely irányban tiszta nyomó erő keletkezik. A feszültségi tenzor főiránya

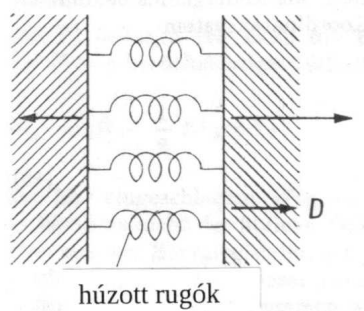


Figure 4: Keresztirányban rétegzett síkkondenzátor feszültségi állapotának szemléltetése rugókkal

tehát egyrészt a térerő iránya, másrészt a merőleges síkban két tetszés szerinti, de egymásra merőleges irány. A feszültség tenzor tehát a főtengelyekkel egybeeső koordináta rendszerben

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \frac{E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \frac{E^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

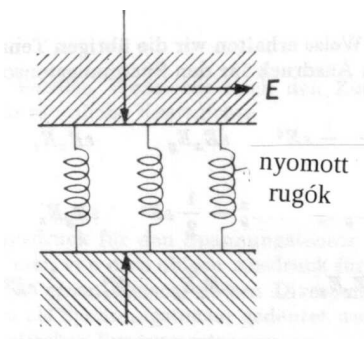


Figure 5: Hosszirányban rétegzett síkkondenzátor feszültségi állapotának szemléltetése rugókkal

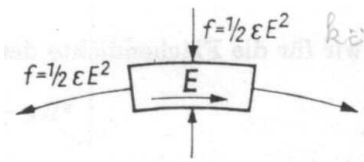


Figure 6: A kivágott kis hasábra ható feszültségek

Egy másik koordináta rendszerben, amely el van forgatva az

$$a_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k' \quad (13)$$

transzformációs együtthatókkal (\mathbf{e}_i az eredeti, \mathbf{e}_k' az elforgatott koordináta rendszer egységvektorai)

$$T'_{ik} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il} a_{km} T_{lm}. \quad (14)$$

A transzformált komponensek könnyen számíthatók, mert csak a T_{11} , T_{22} és T_{33} komponensek különböznek nullától. Pl.

$$T'_{11} = a_{11}a_{11}T_{11} + a_{12}a_{12}T_{22} + a_{13}a_{13}T_{33} \quad (15)$$

$$T'_{11} = a_{11}^2 \frac{\varepsilon E^2}{2} - a_{12}^2 \frac{\varepsilon E^2}{2} - a_{13}^2 \frac{\varepsilon E^2}{2} \quad (16)$$

$$T'_{11} = a_{11}^2 \varepsilon E^2 - \frac{\varepsilon E^2}{2} (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = \varepsilon (a_{11} E)^2 - \frac{\varepsilon E^2}{2}. \quad (17)$$

Az a_{11} együttható az első főirány (E iránya) és az x tengely által bezárt szög koszinusza, ezért

$$a_{11} E = E_x, \quad (18)$$

amivel fenti eredményünk így írható

$$T'_{11} = \varepsilon E_x^2 - \frac{\varepsilon E^2}{2}. \quad (19)$$

A többi transzformált tenzorkomponens hasonlóan számítható. Tetszőleges koordináta-rendszerben a feszültség tenzor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon E_x^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_y E_x & \varepsilon E_y^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_z E_x & \varepsilon E_z E_y & \varepsilon E_z^2 - \frac{\varepsilon}{2} E^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3 1.példa

Egy ponttöltés vákuumban ε_r relatív permittivitású szigetelő féltér fölött a magasságban helyezkedik el. Határozzuk meg a ponttöltés és a szigetelő közötti erőhatást.

A villamos térerősségeket a jól ismert dielektromos tükrözés (7. ábra) segítségével határozzuk meg. Először a fizikai kép alapján számítunk ki egy megbízható eredményt. A ponttöltés polarizálja a szigetelőt, vagyis $\rho = -\text{div } \mathbf{P}$ kötött töltéssűrűség lép fel a szigetelőben és $\sigma = \mathbf{P} \mathbf{n}$ kötött felületi töltéssűrűség a szigetelő határán. A közeg polarizációja $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}$. Mivel a tér a szigetelőben ponttöltés elektrosztatikus tere, $\text{div } \mathbf{P} = 0$ és nincs kötött töltéssűrűség a szigetelőben. A felületi töltéssűrűség

$$\sigma(r) = -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \frac{Q \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}}, \quad (21)$$

ahol a hengerkoordináta-rendszer z tengelye egybeesik a ponttöltésből a határfelületre bocsájtott merőlegessel. Az utolsó tényező a merőleges komponenshez

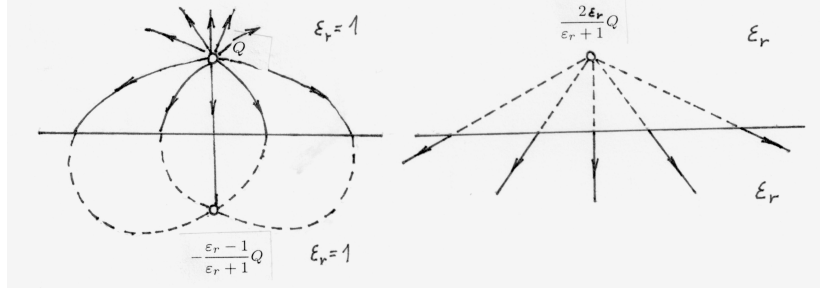


Figure 7: Dielektromos tükrözés. A baloldali ábra a felső térrészben, a jobboldali az alsó térrészben adja meg a teret.

szükséges koszinusz. Az erőhatásnak (amely nyilvánvalóan vonzó) csak az abszolút értékét számoljuk.

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{|\sigma(r)|rdrd\varphi}{r^2 + a^2} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}}, \quad (22)$$

ahol az utolsó tényező az integrálban az erő z komponensének kiszámítására szolgál. Az r komponensek kiejtik egymást. Egyszerűsítések után

$$F = \frac{Q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + a^2)^3} dr. \quad (23)$$

Mivel az integrál értéke $1/(4a^4)$ a végeredmény

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \frac{1}{4a^2}, \quad (24)$$

ami megegyezik a 7. ábra baloldalán lévő ponttöltések közötti erőhatással. Oldjuk meg most a feladatot a feszültség tenzorral. A testre ható teljes erőt a feszültség tenzornak a test teljes felületére vett integrálja adja. Nagy r értékekre a tér elég gyorsan zérushoz tart, így elegendő a közös határfelületre integrálni. A teljes erő a $z = +0$ helyen fellépő (ezt természetesen a felső térrészre érvényes töltésekből számítjuk a 7. ábra baloldala szerint) és a $z = -0$ helyen fellépő különbsége (utóbbit a 7. ábra jobboldala szerint kapjuk). Mivel a határfelület a z tengelyre merőleges, elegendő a T_{zz} komponenst kiszámítani.

A felső féltérre

$$T_{zz}(r, z = +0) = \epsilon_0 E_z^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (25)$$

A felső ponttöltés terét E^+ -al, az alsóét E^- -al jelöljük. Az eredő tér E_r és E_z komponense

$$E_r = E_r^+ - E_r^- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_r + 1} \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad (26)$$

$$E_z = E_z^+ + E_z^- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad (27)$$

$$E^2 = E_r^2 + E_z^2 = \frac{Q^2 4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{(\epsilon_r + 1)^2} \frac{r^2 + \epsilon_r^2 a^2}{(r^2 + a^2)^3}. \quad (28)$$

behelyettesítve (25)-be

$$T_{zz}(r, z = +0) = \varepsilon_0 \frac{Q^2 2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 (\varepsilon_r + 1)^2} \frac{1}{(r^2 + a^2)^3} (\varepsilon_r^2 a^2 - r^2). \quad (29)$$

Az erő ennek a határfelületre vett integrálja

$$F(z = +0) = \int_0^\infty T_{zz}(r, z = +0) 2\pi r dr = \frac{Q^2 (\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1)} \frac{1}{4a^2}, \quad (30)$$

ahol felhasználtuk az alábbi integrálokat

$$\int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + a^2)^3} dr = \frac{1}{4a^4} \quad \int_0^\infty \frac{r^3}{(r^2 + a^2)^3} dr = \frac{1}{4a^2}. \quad (31)$$

Az alsó féltérre

$$T_{zz}(r, z = -0) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_z^2 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} E^2. \quad (32)$$

A térerősség komponensei a 7. ábra jobboldala szerint

$$E_r = \frac{2Q\varepsilon_r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}, \quad (33)$$

$$E_z = \frac{2Q\varepsilon_r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{r^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}. \quad (34)$$

Behelyettesítve (32)-be

$$T_{zz}(r, z = -0) = \frac{2Q^2\varepsilon_0\varepsilon_r}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{a^2 - r^2}{(r^2 + a^2)^3}. \quad (35)$$

Amint az a korábban is felhasznált integrálokból látható, a második tényező integrálja 0-tól ∞ -ig zérussal egyenlő. Eszerint a határfelületre ható erőhatás

$$F = F(z = +0) - F(z = -0) = \frac{Q^2 (\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0 (\varepsilon_r + 1)} \frac{1}{4a^2}, \quad (36)$$

ami megegyezik korábbi eredményünkkel.