

EMT jegyzet

April 9, 2015

1 Az elektromágneses tér energiamérlege

Induljunk ki az első két Maxwell-egyenletből

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

Szorozzuk meg a második egyenletet skalárisan \mathbf{H} -val, az első egyenletet \mathbf{E} -vel és vonjuk ki a második egyenletből az elsőt.

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{E} \mathbf{J} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

A baloldalt a $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$ azonosság segítségével átalakíthatjuk

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \mathbf{J} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Integráljuk most az egyenlőség mindkét oldalát az A zárt felület által határolt V térfogatra

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = - \int_V \mathbf{E} \mathbf{J} dV - \int_V (\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) dV \quad (5)$$

Használjuk fel az V . Maxwell-egyenlet csoportból a $\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$ differenciális Ohm törvényt. Az ebből kifejezett \mathbf{E} -t a jobboldal első integráljába helyettesítjük. A második integrál pedig - amint arról a deriválás elvégzésével meggyőződhetünk - az alábbi módon alakítható át

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2) dV \quad (6)$$

Végül a vektor divergenciájának térfogati integrálját a vektornak a térfogatot határoló zárt felületre vett integráljává írjuk át. A két oldal felcserélésével az alábbi végső alakot nyerjük.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2) dV = \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\gamma} dV - \int_V \mathbf{J} \mathbf{E}_b dV + \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} \quad (7)$$

(7) az elektromágneses tér *energiamérlege*. A baloldali integrandusz a VI. Maxwell-egyenlet szerint az elektromágneses tér energiasűrűsége. Ezért a baloldalon a térfogatban lévő elektromágneses energia időegységre eső változása áll. A negatív előjel azt jelenti, hogy ez az energia csökken. A jobboldal pedig megadja, hogy miért csökken. Az első tag integrandusza a $p = \mathbf{J}^2/\gamma$, a *differenciális Joule törvény*, amely a térfogategységben hővé váló teljesítményt adja. Eszerint az első tag a térfogatban hővé váló teljesítmény, így az első tag mindenképpen pozitív. A másik két tag pozitív és negatív egyaránt lehet és természetesen az első taggal megegyező (azaz pozitív) előjel jelent fogyasztást. A jobboldal második tagja a feszültségforrások teljesítménye. Ha \mathbf{J} és \mathbf{E}_b egyirányúak, akkor a feszültségforrás teljesítményt *ad le*, ha ellenkező irányúak, akkor a feszültségforrás teljesítményt *vesz fel*. A hálózatelméletben éppen fordítva szerepeltek az előjelek, ennek oka, hogy ott a feszültségforrást nem a töltésszétválasztó térerősséggel, hanem a szétválasztott töltések által keltett térerősséggel és a hozzá tartozó forrásfeszültséggel jellemeztük.

Vizsgáljuk most a felületi integrált. Ha az ebben szereplő $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ felületre merőleges komponense a felület (kifelé mutató) normálisával egyirányú, akkor energia távozik a térfogattól a zárt felületen keresztül. Ha az $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ vektor felületre merőleges komponense a felületi normálissal ellentétes irányú, akkor a térfogatba energia áramlik. Az $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ vektort Poynting vektornak nevezzük és \mathbf{S} -el jelöljük. Dimenziója

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{E}][\mathbf{H}] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (8)$$

A Poynting vektor felületre merőleges komponense tehát megadja az egységnyi felületen áthaladó teljesítményt.

2 A makroszkopikus Maxwell-egyenletek levezetése a mikroszkopikus egyenletekből

Egy elektronokból és atommagokból álló mikroszkopikus világot vizsgálunk. Az atommagokat és elektronokat egyaránt pontszerűnek tekintjük. Feltételezzük, hogy ezen pontszerűnek tekinthető töltések között lejátszódó elektromágneses jelenségeket a *mikroszkopikus* Maxwell-egyenletek írják le.

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{b} = \rho_m \mathbf{v}_m + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon_0 \text{div } \mathbf{e} = \rho_m. \quad (12)$$

Ezek az egyenletek kizárólag az \mathbf{e} mikroszkopikus villamos térerősség és a \mathbf{b} mikroszkopikus indukció intenzitás vektorokat tartalmazzák, hiszen amíg a közeget töltött részecskéivel írjuk le, nincs szükség további térjellemzőkre. ρ_m a mikroszkopikus töltéssűrűség, \mathbf{v}_m a részecskék mikroszkopikus sebessége. A makroszkopikus egyenleteket a mikroszkopikus egyenletekből átlagképzéssel

nyerjük. Az átlagképzést olyan térfogatra kell elvégezni, amely makroszkopikusan elég kicsi, hogy benne a sűrűséget állandónak tekinthessük, viszont mikroszkopikusan elég nagy (elég sok részecske van benne), hogy sűrűségről egyáltalán beszélhessünk. Az ilyen térfogatot *egységcellának* nevezzük. Az átlagképzés a hely és idő szerinti deriválással felcserélhető, így (10) és (11) átlagolásából minden további nélkül nyerünk két makroszkopikus egyenletet

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (14)$$

2.1 Polarizációs töltés és áram

A ρ_m mikroszkópikus töltés átlaga két tagból áll

$$\overline{\rho_m} = \overline{\rho_{m1}} + \overline{\rho_{m2}} \quad (15)$$

Az első tag az önálló töltés

$$\overline{\rho_{m1}} = \rho. \quad (16)$$

A második tag a dipóllal modellezhető molekulák hatása. (Magasabb multipolusokat nem veszünk figyelembe). Feltételezzük, hogy valamennyi dipolus egy irányba mutat. Legyen a dipolnyomaték $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Meg akarjuk határozni egy zárt felületen belül az összes polarizációs töltést. Vegyük fel cella gyanánt a $\mathbf{dA} = \mathbf{n}dA$ fedőlapú, $\mathbf{nl} = l \cos \alpha$ vastagságú hasábot (1. ábra). dA -nak makroszkopikusan kicsinek, mikroszkopikusan nagynak kell lennie. A dipólusok helyét a negatív végük helykoordinátája jelöli ki. Az 1. ábrából látható, hogy a polarizáció következtében mindazok a pozitív töltések áttolódnak a dA felületen, amelyek *negatív vége* a hasáb belsejébe esik. Ha térfogategységenként N dipólusunk van, akkor az áttolódo összes töltés

$$qNl \mathbf{dA} = \mathbf{P} \mathbf{dA}, \quad (17)$$

ahol bevezettük a térfogategység dipólnyomatékát, azaz a \mathbf{P} polarizáció vektort. A (17) -1-szeresével megegyező nagyságú negatív töltés marad a hasáb belsejében. Egy zárt felület belsejében maradó összes töltés

$$-\oint_A \mathbf{P} \mathbf{dA} = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \int_V \rho_p dV, \quad (18)$$

azaz a (15) egyenlet második tagja

$$\overline{\rho_{m2}} = \rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (19)$$

Az (9)-ben szereplő mikroszkópikus áramsűrűség átlaga 3 tagra bontható

$$\overline{\rho_m \mathbf{v}_m} = \overline{\rho_m \mathbf{v}_{m1}} + \overline{\rho_m \mathbf{v}_{m2}} + \overline{\rho_m \mathbf{v}_{m3}}, \quad (20)$$

ahol a jobboldal első tagja a vezetési áramsűrűség

$$\overline{\rho_m \mathbf{v}_{m1}} = \mathbf{J}. \quad (21)$$

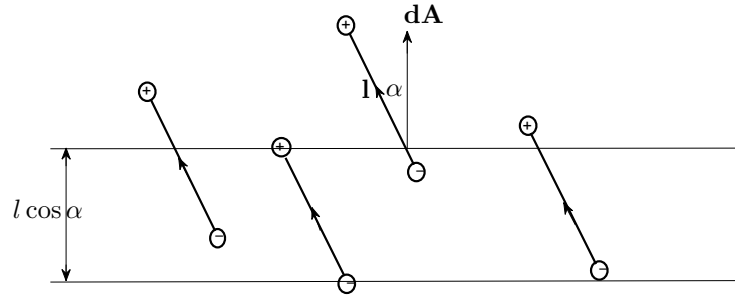


Figure 1: A dA felületelemet átdőfő nyomaték vektorok negatív vége a $dA l \cos \alpha$ térfogatba esik

A második tag a polarizációs áramsűrűség. Ha a polarizáció az időben változik, az 1. ábra \mathbf{p} nyomatékai hosszabbak-rövidebbek lesznek, így a felületen áttolódó töltések száma az időben változik, ami áramot jelent. Ennek nagysága

$$\overline{\rho_m \mathbf{v}_{m2}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (22)$$

A harmadik taggal az alábbiakban foglalkozunk.

2.2 Molekuláris köráramok, mágnesezettség

A mágnese tulajdonságot az atommaghoz tartozó elektronok zárt pályán történő mozgásával magyarázzuk, ami köráramot jelent. Vizsgáljuk az \mathbf{n}_k normálvektorú S felületre feszített I erősségű köráramokat (2. ábra). Az ilyen köráramok száma térfogategységenként N_k . Meghatározzuk, hogy közülük hány hurkolódik az \mathbf{n} vektor által meghatározott egyenes dl hosszúságú szakaszára. Az ilyen köráramok középpontja benne van az $S \cos \alpha_k$ keresztmetszetű, dl hosszúságú (elliptikus vezérgörbájű) hengerben (3. ábra).

A henger térfogata

$$\Delta V_k = S \cos \alpha_k dl \quad (23)$$

Így az \mathbf{n}_k normálvektorú köráramok

$$dI_k = IN_k \Delta V_k = IN_k S \cos \alpha_k dl \quad (24)$$

áramot adnak a dl hosszúságú szakaszon. Összegezve a különböző normálvektorú köráramokra

$$dI = IS dl \sum_k N_k \cos \alpha_k \quad (25)$$

A mágnesezettséget úgy definiáljuk, mint a hosszegységre eső hurkolódó áramot, azaz

$$\mathbf{M} = \frac{dI}{dl} \mathbf{n} = IS \mathbf{n} \sum_k N_k \cos \alpha_k = IS \mathbf{n} \sum_k N_k (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}) \quad (26)$$

Ennek előnye, hogy az igazi okozóval, az árammal fejezi ki a mágnesezettséget. Hátránya, hogy a dipolnál (ami a dielektrikumnál is megjelenik) kevésbé szemléletes. A részecskék saját mágneses nyomatékákaának figyelembevétele is dipol szemléletet igényel. A köráramok mágneses nyomatékát

$$\mathbf{m}_k = IS \mathbf{n}_k \quad (27)$$

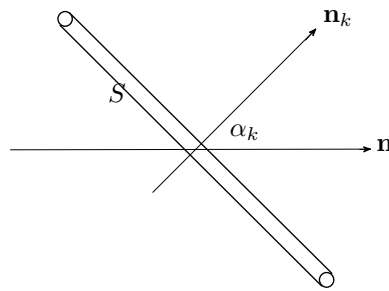


Figure 2: Molekuláris köráram

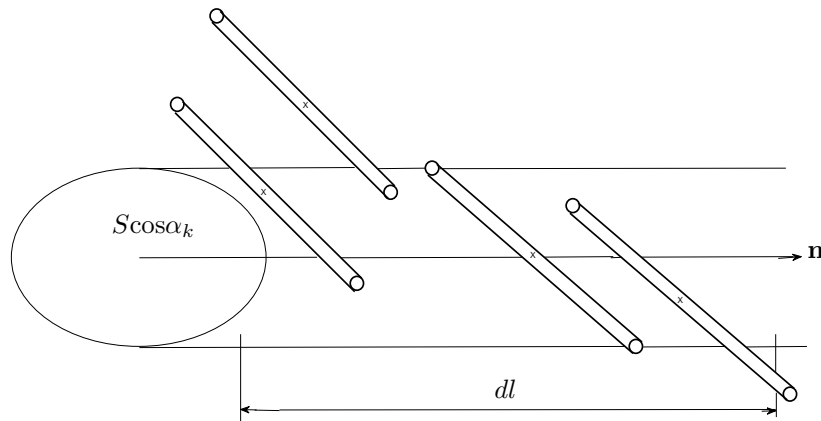


Figure 3: Az \mathbf{n} tengelyt azok a köráramok hurkolják körül, amelyek középpontja a hengeren belül van

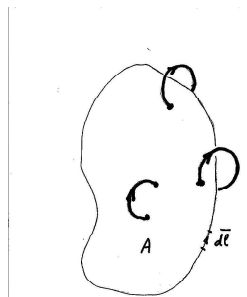


Figure 4: A zárt görbére feszített felületen átfolyó áramhoz csak azok a köráramok adnak járulékot, amelyek körülhurkolják a zárt görbét

figyelembevételével is definiálhatjuk a mágnesezettséget

$$\mathbf{M} = \sum_k N_k (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}) \mathbf{m}_k \quad (28)$$

Tekintsük az anyag belsejében lévő A felületet (4.ábra). Csak a határgörbét hurkoló molekuláris áramok járulnak hozzá a felületen folyó összáramhoz. Az A felületen folyó összes molekuláris áram

$$I_A = \int \mathbf{J}_{mol} d\mathbf{A} = \oint \mathbf{M} d\mathbf{l}, \quad (29)$$

ahol a második egyenlőségénél felhasználtuk a (26) definíciót. (29)-ből a Stokes tétel alapján a

$$\overline{\rho_m \mathbf{v}_{m3}} = \mathbf{J}_{mol} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (30)$$

következik.

2.3 Az eltolási vektor és a mágneses térerősség

A (12) átlagát képezve és a mikroszkópikus töltések átlagát behelyettesítve

$$\varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = \rho - \text{div } \mathbf{P}. \quad (31)$$

A $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ eltolási vektort bevezetve a IV. Maxwell egyenlet szokásos alakját kapjuk.

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (32)$$

A (9) átlagát képezve és a mikroszkópikus áramok átlagát behelyettesítve

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (33)$$

A $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B} - \mathbf{M}$ mágneses térerősséget és a \mathbf{D} eltolási vektort bevezetve az I. Maxwell egyenlet szokásos alakját kapjuk.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (34)$$

3 Elektromágneses tér és anyag kölcsönhatása

3.1 Időbeli diszperzió

Szigetelő anyagokban a villamos térerősség polarizációt hoz létre, azaz vagy szétválasztja a részecskék pozitív és negatív töltését (deformációs polarizáció), vagy a meglévő de össze-vissza álló dipólusokat a tér irányába fordítja (orientációs polarizáció). Ezen folyamatok időfüggését a polarizáció-térerősség kapcsolat felírásánál figyelembe kell venni. A jelenség neve időbeli diszperzió, bár helyesebb lenne időfüggés okozta diszperziónak nevezni. A $\mathbf{p}(t) - \mathbf{E}(t)$ kapcsolat az időtartományban konvolúciós integrál formájában írható fel.

$$\mathbf{p}(t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau, \quad (35)$$

ahol $\mathbf{p}(t)$ a dipolnyomaték, $\mathbf{E}(t)$ a villamos térerősség, a $K(t)$ impulzusválasz szuszceptibilitás/idő dimenziójú. (A szuszceptibilitás az egységnyi térerősség hatására létrejövő dipólusnyomaték.) A polarizáció vektorát, mint a térfogategység dipólusnyomatékát, a térfogategységben lévő dipólusok n számával szorozva nyerjük

$$\mathbf{P}(t) = n\mathbf{p}(t) = n \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau. \quad (36)$$

A legegyszerűbb esetben feltételezzük, hogy a dipolnyomaték időfüggése csak konstans szorzóban különbözik a térerősség időfüggésétől. Ilyenkor a szuszceptibilitás időtől független κ_0 és az impulzusválasz

$$K(t) = \kappa_0 \delta(t). \quad (37)$$

Valóban ilyenkor (36) szerint

$$\mathbf{P}(t) = n \int_{-\infty}^t \kappa_0 \delta(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau = n\kappa_0 \mathbf{E}(t). \quad (38)$$

A fenti példában tiszta fenomenologikus modellt használtunk. Mikrofizikai modelként tekintsünk egy elektron- ion kettőst. A térerősség hatására az elektron eltávolodik az iontól. Tételezzük fel, hogy az elektronra elasztikus, az eltávolodással arányos visszatérítő erő hat. Vezessünk be a sebességgel arányos csillapító erőt is. Ekkor az elektron mozgásegyenlete

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -ax - s \frac{dx}{dt} + qE(t), \quad (39)$$

ahol m az elektron tömege, q a töltése. A fenti egyenletből az x kitéréshez tartozó impulzusválasz Laplace transzformációval könnyen kapható. A $p = qx$ alapján a dipolnyomatékra vonatkozó impulzusválasz

$$K(t) = \varepsilon(t) \frac{q^2}{\omega_i m} e^{-\delta t} \sin \omega_i t, \quad (40)$$

ahol

$$\delta = \frac{s}{2m}, \quad \omega_i = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{a}{m}. \quad (41)$$

Frekvenciatartományban (36) szorzat alakká egyszerűsödik.

$$\mathbf{P}(j\omega) = n\kappa(j\omega)\mathbf{E}(j\omega). \quad (42)$$

ahol $\kappa(j\omega)$ a $K(t)$ Fourier transzformáltja, például (40) esetén

$$\kappa(j\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j2\delta\omega}. \quad (43)$$

A κ szuszceptibilitás ismeretében az eltolási vektor

$$\mathbf{D}(j\omega) = \varepsilon_0\mathbf{E}(j\omega) + \mathbf{P}(j\omega) = \varepsilon_0\mathbf{E}(j\omega) + n\kappa(j\omega)\mathbf{E}(j\omega) = \varepsilon_0\left(1 + \frac{n\kappa(j\omega)}{\varepsilon_0}\right)\mathbf{E}(j\omega), \quad (44)$$

ahonnan a relatív permittivitás

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{n\kappa(j\omega)}{\varepsilon_0}. \quad (45)$$

A permittivitás frekvenciafüggéséből következik a törésmutató és a fázissebesség frekvenciafüggése. Innen ered a diszperzió (szétfolyás) kifejezés: a fehér fény prizmán áthaladva színekké "terül szét".

3.2 A térjellemzők kapcsolata általános esetben

Ha villamos-mágneses csatolást, sztatikus komponenst és a térjellemzők magasabb hatványait is megengedjük, a kapcsolatok alakja

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{P}_s + \varepsilon_0\bar{\bar{\chi}}_e(\omega)\mathbf{E} + \bar{\bar{\xi}}(\omega)\mathbf{H} + \bar{\bar{\beta}}_e(\omega)\mathbf{H}\mathbf{H} + \bar{\bar{\gamma}}_e(\omega)\mathbf{H}\mathbf{E} + \dots \quad (46)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{M}_s + \bar{\bar{\chi}}_m(\omega)\mathbf{H} + \bar{\bar{\zeta}}(\omega)\mathbf{E} + \bar{\bar{\beta}}_m(\omega)\mathbf{E}\mathbf{H} + \bar{\bar{\gamma}}_m(\omega)\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (47)$$

Itt \mathbf{P}_s és \mathbf{M}_s az elektromos polarizáció és mágnesezettség külső tér nélkül, ami az elektrétekben illetve permanens mágnesegekben lép fel. $\bar{\bar{\chi}}_e$ és $\bar{\bar{\chi}}_m$ az elektromos illetve mágneses szuszceptibilitás. A $\bar{\bar{\xi}}$ és $\bar{\bar{\zeta}}$ tenzorok a mágneses tér okozta elektromos polarizációt, illetve a villamos tér okozta mágnesezettséget fejezik ki. A $\bar{\bar{\beta}}$ és $\bar{\bar{\gamma}}$ harmadrendű tenzorok a magasabbfokú polarizációs hatásokat reprezentálják.

3.3 Anizotróp és bi-anizotróp anyagok

Azokat az anyagokat, amelyek akár szerkezetüknél fogva, akár elektromos vagy mágneses előfeszítés folytán kitüntetett irányokkal rendelkeznek anizotróp (irányfüggő) anyagoknak nevezzük. Az ilyen anyagokban \mathbf{E} és \mathbf{D} illetve \mathbf{H} és \mathbf{B} nem egyirányú, azaz a permittivitás illetve a permeabilitás tenzor mennyiség.

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}}\mathbf{E} \quad (48)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}}\mathbf{H}. \quad (49)$$

Példaképpen vázoljuk az anizotrópia okát mágnesezhető kristályokban. Ez a mágneses-kristály anizotrópia. Az elektronpályák a kristály struktúrájához kötöttek és a spinnel való kölcsönhatásuk révén az utóbbiakkal is preferáltatják, hogy beálljanak jól meghatározott krisztallografikai tengelyek irányába. Így a térben olyan irányok lesznek, amelyekbe a kristályt könnyebb mágnesezni, mint más irányokba.

Ha villamos-mágneses csatolás is fellép és ez a csatolás is irányfüggő, akkor bi-anizotróp anyagról beszélünk. Ezekben a térjellemzők kapcsolata

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E} + \bar{\bar{\xi}} \mathbf{H}, \quad (50)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\zeta}} \mathbf{E} + \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}. \quad (51)$$

A bi-anizotróp anyagok jellemzéséhez 36 komplex paraméterre van szükség.

4 A Poisson-egyenlet

4.1 A skaláris Poisson-egyenlet

Ismeretes, hogy az elektrosztatikára érvényes

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (52)$$

egyenletből következik, hogy a villamos tér levezethető a φ skalárpotenciálból

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (53)$$

A töltéssűrűség ismeretében a skalárpotenciál a skaláris Poisson egyenlet megoldásával kapható

$$\Delta \varphi = -\rho/\epsilon. \quad (54)$$

A skaláris Poisson egyenlet megoldása

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'. \quad (55)$$

Ennek a tisztán matematikai úton nyert eredménynek szemléletes fizikai jelentése van: a tértöltésfelhő ponttöltések szuperpozíciójaként hozza létre a potenciált. Lásd a 5 ábrát.

A leírtak szemléltetik az elektrodinamika általános módszerét:

gerjesztés \rightarrow segédmenyiség \rightarrow tér

töltéssűrűség \rightarrow potenciál \rightarrow villamos tér.

4.2 A vektoriális Poisson egyenlet

Az időben állandó áramok mágneses terét leíró Maxwell egyenletek

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (56)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (57)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (58)$$

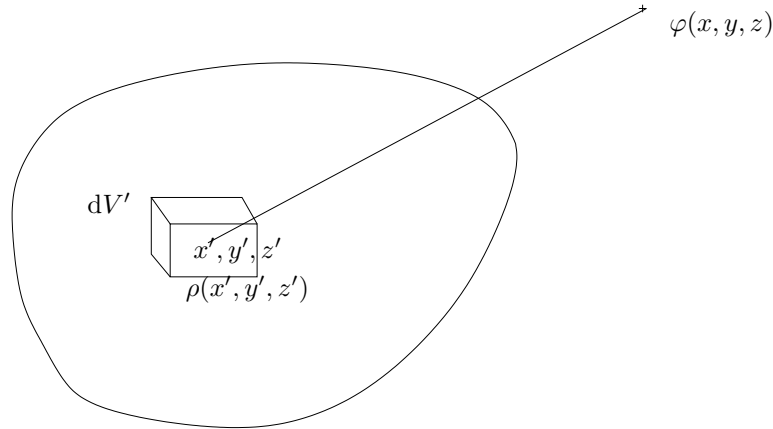


Figure 5: A tértöltésfelhő $\rho dV'$ nagyságú ponttöltések szuperpozíciójaként hozza létre a potenciált

A (57) szerint \mathbf{B} forrásmentes vektortér, így levezethető egy vektor rotációjaként

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (59)$$

Ezzel a választással (57)-öt valóban kielégítettük, mert $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$ tetszőleges \mathbf{v} vektorra. \mathbf{A} -t a skalár potenciállal való analógia alapján *vektorpotenciálnak* nevezzük. Szorozzuk végig (56)-et μ -vel, használjuk fel (58)-t és írjuk be \mathbf{B} helyébe (59)-et

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (60)$$

Vezessük be a vektorra érvényes Laplace operátort az alábbi definícióval

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (61)$$

Az eredmény természetesen vektor és mivel a jobboldalon szereplő vektoroperátorok tetszőleges koordináta-rendszerben értelmezettek, a $\Delta \mathbf{A}$ is kiszámítható. (61) felhasználásával (60) az alábbi lesz

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (62)$$

Az \mathbf{A} vektornak (59) szerint eddig csak a rotációjáról döntöttünk, a divergenciáját még szabadon megválaszthatjuk. A vektorpotenciál divergenciájának megválasztását *mértékválasztásnak* nevezzük. (62) akkor lesz a legegyszerűbb, ha $\text{div } \mathbf{A} = 0$ -t választunk. Ez a Coulomb mérték. Ezzel egyenletünk a (54) skaláris Poisson egyenlettel megegyező alakú lesz.

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}. \quad (63)$$

(63) a vektoriális Poisson egyenlet. Megoldását visszavezethetjük a skaláris Poisson egyenlet (55) megoldására. A \mathbf{v} vektorra alkalmazott Laplace operátor vektort eredményez, amelynek három rendezője van. Descartes koordinátákban az adódik, hogy a három rendező éppen a \mathbf{v} vektor három komponensére alkalmazott skalárra érvényes Laplace kifejezés. Megjegyezzük, hogy henger- és

gömb koordináta rendszerben ez nincs így! Felírjuk a vektoriális Poisson egyenletet rendezőkre bontott alakban Descartes koordinátákban.

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x, \quad (64)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y, \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z, \quad (66)$$

Ezek az egyenletek skaláris Poisson egyenletek, ezért a megoldásukat átvehetjük (55)-ből. Például a (64) esetén a $\rho \rightarrow J_x$, $\varepsilon_0 \rightarrow 1/\mu$ helyettesítéssel

$$A_x(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'. \quad (67)$$

Hasonló kifejezéseket felírva az y és z komponensre, a kifejezéseket az x , y , z irányú egységvektorokkal megszorozva és összeadva nyerjük (63) megoldását

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'. \quad (68)$$

Az eredményt a 5 ábra módján szemléltethetjük, de hasonló fizikai képet nem tudunk hozzárendelni: a $\mathbf{J}dV$ -nek nincs fizikai jelentése. A megoldási módszer általános sémája:

gerjesztés \rightarrow segédmenyiség \rightarrow tér itt az alábbi:

áramsűrűség \rightarrow vektorpotenciál \rightarrow mágneses indukció.

Már az eddigiekből is látszik a skalár- és vektorpotenciál egyenrangú szerepe az elektrodinamikában. Mégis azt tapasztaljuk, hogy a skalárpotenciál jobban ismert és jóval elterjedtebben használt, mint a vektorpotenciál. Ennek több oka van. 1) A skalár potenciál jelentősen egyszerűsíti az elektrodinamikai feladatok megoldását: vektor helyett skalár az ismeretlen. Ennek ábrázolása is egyszerűbb, szintfelületekkel történik. Ugyanezeket az egyszerűsödéseket a vektorpotenciál bevezetése nem hozza magával. Sőt, egy olyan egyszerű feladat, mint az árammal átjárt véges sugarú, hosszú egyenes vezető mágneses terének meghatározása, ami gerjesztési törvénnyel néhány sor, vektorpotenciállal néhány oldal. 2) A skalár potenciál mérésére egyszerű műszer - a voltmérő - áll rendelkezésünkre, a vektorpotenciál mérésére ilyen egyszerű műszer nincs. 3) A skalár potenciált közvetlen kapcsolata a helyzeti energiával az elektromos munka és teljesítmény meghatározásában nélkülözhetlenné teszi.

Nem szabad azonban a vektorpotenciált afféle matematikai konstrukciónak gondolnunk. A vektorpotenciál önálló fizikai létező. Ha meghatározzuk egy hosszú egyenes tekercs terét, akkor azt találjuk, hogy a tekercsen kívül mind a villamos mind a mágneses térerősség zérus, de a vektorpotenciál nem zérus. Ugyanakkor a vektorpotenciál hatására a kvantummechanikai hullámfüggvénynek megváltozik a fázisa. Ez az Aharanov-Bohm effektus, amit mérésekkel is igazoltak.

Visszatérve az időben állandó áramok mágneses terének számításához: ha (68)-et vonalas vezetőre (vezetékre) specializáljuk és belőle az indukciót rotáció

képzéssel kiszámítjuk, a Biot-Savart törvényhez jutunk. Még egy hasznos eredmény, amely a fluxust a vektorpotenciállal fejezi ki

$$\Phi = \int_a \mathbf{B} da = \int_a \text{rot } \mathbf{A} da = \oint_C \mathbf{A} dl, \quad (69)$$

vagyis zárt görbére feszített felület fluxusát megkapjuk, ha a vektorpotenciálnak a zárt görbére vett vonalintegrálját képezzük. Itt a szokásos helyett a felületet a -val jelöltük, mert a \mathbf{A} a vektorpotenciált jelenti.

5 A potenciálokra vonatkozó inhomogén hullámegyenletek

Célunk az elektromágneses hullámok gerjesztésének vizsgálata. Mint látni fogjuk a gerjesztő mennyiségek, a ρ töltéssűrűség és a \mathbf{J} áramsűrűség megjelennek a hullámegyenletek jobboldalán, inhomogénná téve őket.

Írjuk fel az első négy Maxwell egyenletet

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (70)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (71)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (72)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (73)$$

A (72) egyenletet kielégítjük, ha \mathbf{B} -t egy vektor, a *vektorpotenciál* rotációjaként írjuk fel

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (74)$$

Behelyettesítve (74)-at a (71)-be

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \text{rot } \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (75)$$

ahonnan

$$\text{rot } \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (76)$$

Utobbi egyenletünkéből következik, hogy most is találunk örvénymentes vektort, éspedig az $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ -t, ami ezek szerint levezethető egy φ skalárpotenciál negatív gradienseként.

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi, \quad (77)$$

ahonnan

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (78)$$

A négy Maxwell egyenletből kettőt, a (72)-et és a (71)-et felhasználva nyertük a (74)-at és a (78)-et, amelyek a mágneses indukciót és a villamos térerősséget adják a potenciálokkal kifejezve. A maradék két Maxwell egyenlet adja a potenciálokat meghatározó két egyenletet.

Helyettesítsük be a μ -vel végigszorozott (70)-be (71)-et és (74)-at

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (79)$$

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \varepsilon \mu \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (80)$$

\mathbf{A} -nak eddig csak a rotációját rögzítettük, a divergenciáját még szabadon megválaszthatjuk. Ez a mértékválasztás. Korábban a $\text{div } \mathbf{A} = 0$ volt célszerű (Coulomb mérték), most a

$$\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (81)$$

Lorenz mérték. Ekkor (80)-ból az

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (82)$$

inhomogén hullámegyenletet nyerjük. Emeljük ki (73)-ból ε -t, majd helyettesítsük be a villamos térerősség (78) kifejezését.

$$\text{div} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (83)$$

$\text{div grad} = \Delta$, a $\text{div } \mathbf{A}$ viszont a (81)-al kifejezhető a φ skalár potenciállal. Végeredményben

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (84)$$

Összefoglalva: a ρ töltéssűrűség és a \mathbf{J} áramsűrűség által gerjesztett elektromágneses teret a potenciálok közbeiktatásával oldjuk meg. Először megoldandó a (84) és (82) inhomogén hullámegyenlet, majd az így nyert potenciálokból a (78) és (74) segítségével nyerjük a villamos és mágneses teret.

6 Az inhomogén hullámegyenletek megoldása: retardált potenciálok

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a (84) és (82) inhomogén hullámegyenletek megoldása

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z', t - r/v)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz', \quad (85)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - r/v)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz', \quad (86)$$

ahol $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Ha φ és \mathbf{A} ill. ρ és \mathbf{J} argumentumát nem íránk ki, az eredmény tökéletesen megegyezne (55)-al ill. (68)-al. (85) és (86) értelmezését a 6 ábrán szemléltetjük. Mivel a töltésváltozás hatásának véges terjedési időre van szüksége, hogy elérje a megfigyelési pontot, azért a potenciál t időpontbeli értékét a töltés korábbi, $t - r/v$ időpontbeli értéke

határozza meg, ahol v az elektromágneses hullám terjedési sebessége. Ezért a (85)-et és (86)-et *retardált* (késeletetett) potenciálnak nevezzük.

A korábban ismertetett séma: gerjesztés \rightarrow segédmenyiség \rightarrow tér itt az alábbi

$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow \varphi \\ \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{A} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}$. Az első lépéshez az (85) és (86) szolgál, míg a másodikhoz a (78) és (74).

Felmerül a kérdés: nem lehetne-e a gerjesztésekből a tereket meghatározni és utána késeletetni? Igazolható, hogy így nem kapnánk helyes eredményt, a segédmenyiségek (potenciálok) közbeiktatására szükség van. Ez matematikai szempontból is érthető: az (85) és (86)-ben egy új helyen, a források argumentumában is megjelent az x, y, z , (az r tartalmazza). Így a tér meghatározásához szükséges, a potenciálokon végrehajtott vektor operációk, amelyek x, y, z szerinti deriváltakat tartalmaznak bonyolultabb teret adnak, mintha a (55)-ből és (68)-ból számított tereket késeletetnénk.

A következő kérdés: a (85) és (86) alapján számított potenciálok eleget tesznek-e a (81) Lorenz mértéknek? Ha felírjuk a Lorenz mértéket

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (87)$$

rögtön észrevehetjük, hogy erősen emlékeztet a

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (88)$$

folytonossági egyenletre. Hogy itt nem csak felszínes hasonlóságról van szó, az onnan is látszik, hogy \mathbf{A} a \mathbf{J} -vel, φ a ρ -val kapcsolatos. Valóban igazolható, hogy ha ρ és \mathbf{J} eleget tesz a (88) folytonossági egyenletnek, akkor a belőlük számított φ és \mathbf{A} eleget tesz a (81) Lorenz mértéknek.

Ezek után a gerjesztési probléma megoldására az alábbi lehetőségeink vannak.

1. Folytonossági egyenletnek eleget tevő töltéssűrűségből és áramsűrűségből indulunk ki. Meghatározzuk az általuk gerjesztett retardált potenciálokat,

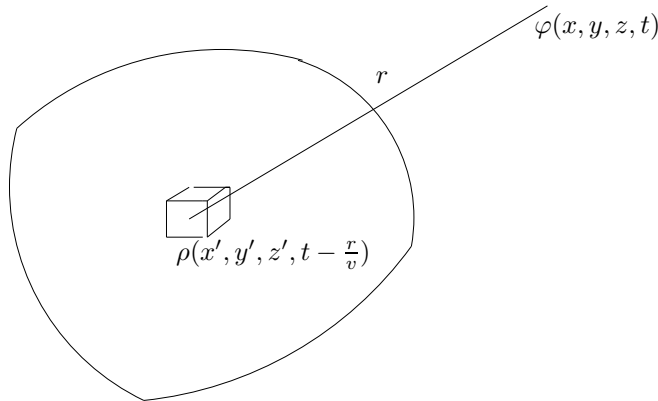


Figure 6: A potenciál t pillanatbeli értékét a tértöltés r/v -vel korábbi értéke határozza meg

amelyek a Lorenz mértéket automatikusan teljesítik, majd a potenciálokból a villamos teret és az indukció vektort.

2. Az áramsűrűségből indulunk ki, nem törődünk a hozzá - a folytonossági egyenleten keresztül - kapcsolódó töltéssűrűséggel. Az áramsűrűségből kiszámítjuk a retardált vektor potenciált. A villamos térerősséghez azonban (78) szerint szükségünk van a skalárpotenciálra is. Ezt most a (81) Lorenz mértékből számoljuk. Hogy a $\partial\varphi/\partial t$ -ben jelentkező idő szerinti deriválás ne okozzon gondot φ meghatározásánál, szinuszos időbeli változásra szorítkozunk és a komplex számítási módszert használjuk. Ekkor a Lorenz mérték az alábbi lesz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\varphi = 0. \quad (89)$$

Innen φ meghatározható és (78)-ba helyettesíthető. Tisztában kell lennünk azzal, hogy az így meghatározott skalár potenciál megegyezik azzal, amit az áramsűrűséghez folytonossági egyenlettel kapcsolódó töltéssűrűség hoz létre.

Mégegyszer visszatérünk a vektorpotenciál fontosságának bemutatására. Ha

a

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (90)$$

Lorentz erőtvényben a villamos térerősséget és a mágneses indukciót a (78) és (74) alapján a potenciálokkal helyettesítjük, akkor átalakítások után az alábbi eredményt nyerjük

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}) = -Q\operatorname{grad}(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (91)$$

Ennek az egyenletnek a mondanivalója: az impulzus időbeli változása az erővel egyenlő. Látható, hogy a $Q\mathbf{A}$ mennyiséget kell hozzáadni az $m\mathbf{v}$ -hez, hogy megkapjuk az "igazi" impulzust, ahogy a $Q\varphi$ az a mennyiség, amit hozzá kell adni az $\frac{1}{2}mv^2$ -hez, hogy megkapjuk az "igazi", megmaradó energiát. Az egyenlet jobboldalán a $Q(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A})$ általánosított, sebességfüggő potenciális energia negatív gradiense adja az erőt.

A kétféle impulzust célszerű megkülönböztető névvel ellátni. Az $m\mathbf{v}$ -t Feynman nyomán mv impulzusnak, az $m\mathbf{v} + Q\mathbf{A}$ -t p impulzusnak nevezzük. A p impulzusnak nagy szerepe van a kvantummechanikában. Szupravezető állapotban a p impulzus zérus volta adja az áramsűrűség és a vektorpotenciál közötti konstitutív relációt.

7 A Hertz dipólus

A 7 ábrán egy l hosszúságú, a keresztmetszetű jól vezető, tömör fémhenger látható. A fémhenger belsejében az áramsűrűség tengely irányú és a helykoordinátáktól független, az időtől koszinuszosan függ.

$$J(z, t) = \begin{cases} J_0 \cos \omega t & \text{ha } 0 < z < l \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (92)$$

Az egységugrás függvény felhasználásával az áramsűrűség így is írható

$$J(z, t) = J_0 \cos \omega t [\varepsilon(z) - \varepsilon(z - l)]. \quad (93)$$

Feladatunk, hogy ezen áramsűrűség által keltett elektromágneses teret meghatározzuk. Az előző pont végén felsorolt lehetőségek közül az 1.-et választjuk, mert így kapjuk a legtisztább fizikai képet. Először szemlélet alapján mutatjuk meg a (93)-hez tartozó töltéssűrűséget. Az áramsűrűség csak úgy lehet belül konstans és kívül nulla, hogy az áram a töltéseket az egyik lapról elszállítja és a másik lapon lerakja, vagyis az áramsűrűséghez a véglapokon időben változó töltéssűrűség tartozik. Határozzuk meg analitikusan is a

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (94)$$

folytonossági egyenletből a (93)-hez tartozó töltéssűrűséget. Figyelembevéve, hogy az áramsűrűségnek csak z komponense van

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} J_0 \cos \omega t [\varepsilon(z) - \varepsilon(z-l)] \quad (95)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -J_0 \cos \omega t \delta(z) + J_0 \cos \omega t \delta(z-l), \quad (96)$$

ahol $\delta(z)$ a Dirac-féle delta függvény. Elvégezve az idő szerinti integrálást

$$\rho = -\frac{J_0}{\omega} \sin \omega t \delta(z) + \frac{J_0}{\omega} \sin \omega t \delta(z-l). \quad (97)$$

Az eredmény értelmezéséhez ρ térfogati integrálásával határozzuk meg pl. az alaplap össztöltését. A térfogati integrál keresztmetszetben a -val való szorzással egyszerűsödik, viszont a z irányú integrál -0 -tól $+0$ -ig éppen $-J_0 a / \omega \sin \omega t$ -t ad. a -val elosztva kapjuk, hogy a felületi töltéssűrűség

$$\sigma(0, t) = -\frac{J_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (98)$$

Hasonlóan a fedőlapra

$$\sigma(l, t) = \frac{J_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (99)$$

A 8 ábrán az áramsűrűség és a felületi töltéssűrűségek láthatók. A $t = 0$ pillanatban az áram maximális és a felületi töltéssűrűségek zérussal egyenlők.

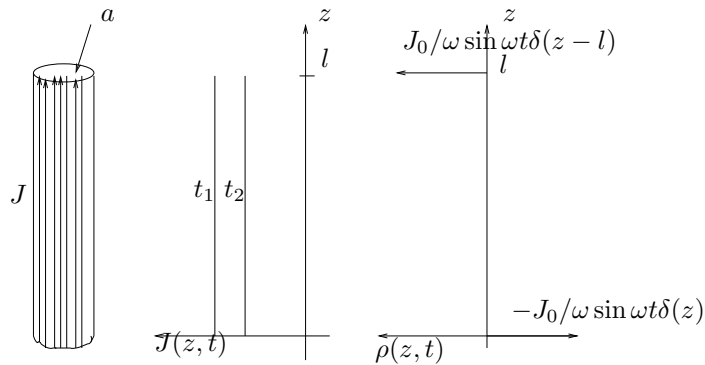


Figure 7: Rövid antenna áram- és töltéseloszlása

Negyed periódussal később az áram zérus és a töltések veszik fel szélső értéküket. A lengés így folytatódik tovább, a mágneses és elektromos energia folytonosan egymásba alakul, mint a rezgőkörnél, vagy az ingánál a mozgási és helyzeti energia.

A skalárpotenciált nem a (85) formula kiintegrálásával határozzuk meg. Feltételezzük, hogy az antenna sugara jóval kisebb annál a távolságnál, ahol a potenciált keressük. Így az alap és fedőlap össztöltése is σa nagyságú ponttöltésnek tekinthető. A két ponttöltés

$$Q(0, t) = -\frac{I_0}{\omega} \sin \omega t \quad (100)$$

és

$$Q(l, t) = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (101)$$

ahol $I_0 = J_0 a$ az antenna összáramának csúcsértéke. A két ponttöltés eredő retardált potenciálja a 9. ábra szerint

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\frac{I_0}{\omega} \sin \omega(t - \frac{|\mathbf{r}+l|}{v})}{|\mathbf{r}+l|} - \frac{\frac{I_0}{\omega} \sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} \right) \quad (102)$$

A fenti formula nem ad áttekinthető eredményt a skalárpotenciál helyfüggésére. Ha olyan távolságban keressük a potenciált, amely a töltések l távolságánál sokkal nagyobb, akkor a sztatikus dipólusnál látottakhoz hasonlóan itt is bevezethető a dipólus absztrakció. Tartson az l távolság zérushoz és ugyanakkor az I_0 végtelenhez, úgy, hogy az $I_0 l$ szorzat konstans maradjon. Az $I_0 l$ szorzatot az antenna nyomatékának nevezzük. A gradiens definíciója szerint

$$\varphi(P, t) = \frac{I_0 l}{4\pi\epsilon\omega} \text{grad}_0 \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r}, \quad (103)$$

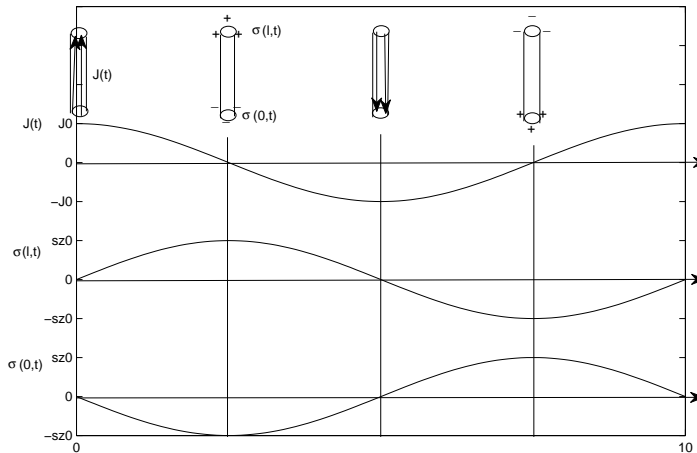


Figure 8: Rövid antenna áramának és töltésének időfüggése

ahol a gradiens 0 indexe azt jelenti, hogy a gradiensképzés az 0 pont koordinátái szerint történik. Áttérve a P pont koordinátái szerinti gradiensképzésre, az alábbi végeredményt nyerjük

$$\varphi(P, t) = -\frac{I_0 \mathbf{l}}{4\pi\epsilon\omega} \text{grad}_P \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r}, \quad (104)$$

A dipol-absztrakcióra áttérés következtében pontszerű képződményt kaptunk a koordinátarendszer kezdőpontjában. Míg a korábbi (102) eredményből a helyfüggésre semmiféle általános képünk nincs, az (104) világosan kifejezi a helyfüggést a *gömbkoordináták* segítségével.

Jóval egyszerűbb a vektorpotenciál meghatározása. A 10. ábra alapján a (86) így írható

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(S, t - \frac{r_{PS}}{v})}{r_{PS}} dV_S = \frac{\mu}{4\pi} \int_{z=0}^l \frac{J_0 \cos \omega(t - \frac{r_{PS}}{v})}{r_{PS}} a dz \mathbf{e}_z \quad (105)$$

Vegyük figyelembe, hogy $J_0 a = I_0$, továbbá tartson az l zérushoz, az I_0 végtelenhez úgy, hogy az $I_0 l$ szorzat (az antenna nyomatéka) konstans maradjon. Ekkor

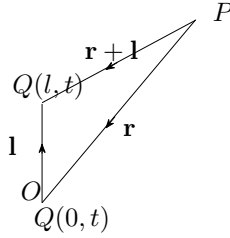


Figure 9: A retardált skalár potenciál meghatározásához

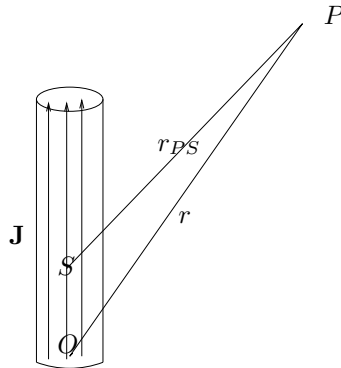


Figure 10: A retardált vektor potenciál meghatározásához

$r_{PS} \rightarrow r$, ahol r a P pont origótól mért távolsága és az alábbi végeredményt kapjuk

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu I_0 \mathbf{l}}{4\pi} \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{v})}{r}. \quad (106)$$

Könnyű megmutatni, hogy mivel a skalár- és vektorpotenciált folytonossági egyenletnek eleget tevő töltés- és áramsűrűségből számítottuk, a (81) Lorenz mértéknek eleget tesznek. Valóban, mivel a vektorpotenciálnak csak z komponense van $\text{div} = \partial/\partial z$, továbbá mivel \mathbf{l} is z irányú, $\text{Igrad} = l\partial/\partial z$. Így (81) az alábbi módon írható

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu I_0 l}{4\pi} \frac{\cos \omega(t - \frac{r}{v})}{r} - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_0 l}{4\pi \varepsilon \omega} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin \omega(t - \frac{r}{v})}{r} = 0, \quad (107)$$

ami láthatóan teljesül.

Következne a térerősségek meghatározása a (78) és (73) segítségével. Ezt nem részletezzük, csupán megjegyezzük, hogy a vektorpotenciál gömbkoordinátákban $\mathbf{A} = A \cos \theta \mathbf{e}_r - A \sin \theta \mathbf{e}_\theta$. Végrehajtva a gradiens és rotáció képzést gömbkoordinátákban az alábbi eredményt kapjuk a teljes térre

$$E_r(r, \theta, t) = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{2}{r^2} \left[\cos(\omega t - \beta r) + \frac{1}{\beta r} \sin(\omega t - \beta r) \right] \cos \theta, \quad (108)$$

$$E_\theta(r, \theta, t) = \frac{I_0 l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\beta}{r} \left[- \left(1 - \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) \sin(\omega t - \beta r) + \frac{1}{\beta r} \cos(\omega t - \beta r) \right] \sin \theta, \quad (109)$$

$$E_\varphi(r, \theta, t) = 0, \quad (110)$$

$$H_r(r, \theta, t) = 0, \quad (111)$$

$$H_\theta(r, \theta, t) = 0, \quad (112)$$

$$H_\varphi(r, \theta, t) = \frac{I_0 l}{4\pi} \frac{\beta}{r} \left[- \sin(\omega t - \beta r) + \frac{1}{\beta r} \cos(\omega t - \beta r) \right] \sin \theta, \quad (113)$$

ahol bevezettük a $\beta = \omega/v$ fázistényezőt

Vizsgáljuk meg a (108)-(113)által leírt tér néhány tulajdonságát.

1. Valamennyi komponens haladó hullám módjára terjed r irányba, azaz az origóból kiinduló sugarak mentén.
2. A villamos térnek nincs φ komponense, ezért a villamos erővonalak a z tengelyen átmenő síkokba esnek.
3. A mágneses térnek csak φ komponense van: a mágneses erővonalak körök, amelyek a z tengelyre merőleges síkokban fekszenek és középpontjaik a z tengelyre esnek.
4. A villamos tér r komponense $\cos \theta$ -val, θ komponense $\sin \theta$ -val arányos. Ezért a $\theta = \pi/2$ közelében a θ irányú komponens dominál, azaz az erővonalak jó közelítéssel körívek.
5. Távolságfüggés. Ha $\beta r \ll 1$, azaz ha $r \ll \lambda/(2\pi)$, akkor (108)-ben a szögletes zárójel második tagja, míg (109)-ban a nagy gömbölyű zárójel második tagja dominál. Mivel $I_0 \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}/\beta = I_0 \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} v/\omega = Q_0/\varepsilon_0$, azért ez a két tag megegyezik a sztatikus dipólus terével, ha azt a $\sin(\omega t -$

βr) tényezővel megszorozzuk. A Hertz dipólus terének ezt a részét *sztatikus térnek* nevezzük.

Az (113) mágneses tér $1/r^2$ -el változó része megegyezik az áramelemnek a Biot-Savart törvénnyel számított mágneses terével, ha azt az $\cos(\omega t - \beta r)$ tényezővel megszorozzuk. A villamos tér $1/r^2$ -es része ebből a mágneses térből az indukció törvény alapján számítható. Azért a tér $1/r^2$ -el változó részét *indukciós térnek* nevezzük.

A sztatikus és indukciós tér közös neve: *közeltér*.

Utoljára hagytuk a térnek azt a részét, amely $\beta r \gg 1$, azaz $r \gg \lambda/2\pi$ esetén dominál. A térnek ez a része a *távoltér*, vagy *sugárzó tér*.

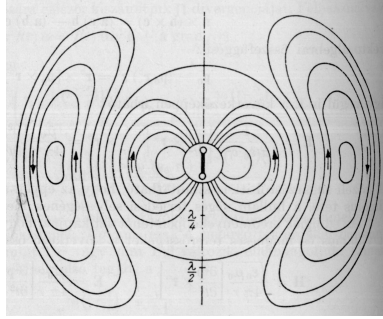


Figure 11: Hertz dipólus villamos erővonalai

Az erővonalkép a 11. ábrán látható. $\theta = \pi/2$ környezetében a villamos erővonalak valóban körívek. $\theta = 0$ felé közeledve a szinuszos illetve koszinuszos θ függés miatt az erővonalak θ irányából fokozatosan r irányába mennek át, létrehozva ezáltal az erővonalak záródását. A zárt villamos erővonalak az indukció törvény szerint a kör alakú $\partial \mathbf{B} / \partial t$ vonalakra vannak felfűzve (a szinuszos változási sebességének szélsőértéke a nullátmenetnél van, vagyis a $\partial \mathbf{B} / \partial t$ szélsőértéke a \mathbf{H} vonalak szélsőértékétől negyedhullámhosszal el van tolódva).

A továbbiakban kizárólag a távoltérrel foglalkozunk. A távoltér némi átalakítással az alábbi alakra hozható

$$E_{\theta}(r, \theta, t) = -\frac{I_0}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda r} \sin \theta \sin(\omega t - \beta r), \quad (114)$$

$$H_{\varphi}(r, \theta, t) = -\frac{I_0}{2} \frac{l}{\lambda r} \sin \theta \sin(\omega t - \beta r). \quad (115)$$

A (114) és (115)-ből a távoltér alábbi tulajdonságai olvashatók le. A továbbiakban a villamos tér θ illetve a mágneses tér φ indexét elhagyjuk.

1. A villamos és mágneses térerősség fázisban van és a csúcserősségeik hányadosa a közeg hullámenállásával megegyezik.

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega. \quad (116)$$

2. A villamos és mágneses tér egymásra merőleges és mindkettő merőleges a terjedés irányára. Ebből következik, hogy a Poynting vektor sugár irányú.

Befejezésül adjuk meg a Hertz dipólus definícióját. A Hertz dipólus absztrakció, pontszerű képződmény, amelynek iránya is van. Két egybeeső, időben változó pozitív és negatív töltés alkotja, amelyek között zérus hosszúságú összekötő vezetéken töltésáramlás történik. Látható, hogy ez a fogalom, mint határérték képzés eredménye nem szemléletes. Az absztrakció véges hosszúságú és véges áramú antennák terének számítására használható az alábbi feltételek mellett.

1. Az antenna hossza sokkal kisebb, mint a hullámhossz. Erre azért van szükség, hogy az antenna áramát helyfüggetlennek vehessük.
2. Annak a pontnak az antennától vett távolsága, ahol a teret keressük, legyen jóval nagyobb, mint az antenna hossza.

Ezekkel a feltételekkel az antenna egy $I_0 l$ nyomatékú Hertz dipólussal helyettesíthető, pontosan úgy, ahogy egy U_0 magasságú, T szélességű rövid impulzus $U_0 T \delta(t)$ Dirac impulzussal helyettesíthető.

Helyfüggő áramú antennák differenciális hosszúságú szakasza Hertz dipólusnak tekinthető és a teljes tér integrálással számítható.

8 Antennákkal kapcsolatos fogalmak

8.1 Az elsugárzott teljesítmény. Sugárzási ellenállás.

A Hertz dipólus által elsugárzott teljesítményt a távolférfi Poynting vektorból számíthatjuk, mert az energiamegmaradás alapján ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha a teljes térből számolnánk. A távolférfi Poynting vektornak csak r komponense van. Ennek hely-idő függvénye (114) és (115) alapján

$$S(r, \theta, t) = \frac{I_0^2}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \sin(\omega t - \beta r). \quad (117)$$

Mivel az utolsó tényező időátlaga $1/2$, azért a Poynting vektor időátlaga

$$S_{ia}(r, \theta) = \frac{I_0^2}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (118)$$

A továbbiakban kizárólag a Poynting vektor időátlaga fordul elő, ezért az ia

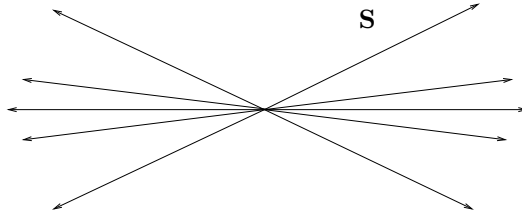


Figure 12: A Poynting vektor időátlagának erővonalai

indexet elhagyjuk. A 12.ábrán a Poynting vektor időátlagának erővonalaképe látható. A teljesítménysűrűség legnagyobb a $\theta = \pi/2$ irányában. (118)-et az

r_0 sugarú gömb felületére integrálva a Hertz dipólus elsugárzott teljesítményét kapjuk

$$P = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{I_0^2}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r_0^2} \sin^2 \theta r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2. \quad (119)$$

Az $1/2I_0^2$ ellenállásdimenziójú szorzóját *sugárzási ellenállás*nak nevezzük és R_s -el jelöljük.

$$P = \frac{1}{2} R_s I_0^2, \quad R_s = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (120)$$

A sugárzási ellenállás az a képzeletbeli ellenállás, amibe az antenna áramát vezetve ugyanakkora teljesítményt disszipálna, amekkorát az antenna elsugároz. Ha az adószobából nem látható módon az antenna helyébe valaki a sugárzási ellenállással megegyező nagyságú ellenállást köt, az adó működésében semmi változás nem lenne tapasztalható. Elkészült adó bemérésénél is célszerű a sugárzási ellenállással megegyező nagyságú ellenállás használata.

8.2 Az iránykarakteristikák

Az (114) alapján *rögzített* r_0 sugárnál a távoltéri villamos térerősség csúcértékének θ függése

$$E(\theta) = \frac{I_0}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{l}{\lambda} \frac{1}{r_0} \sin \theta = E(\theta = \pi/2) \sin \theta = E_{max} \sin \theta, \quad (121)$$

ahol E_{max} irány szerinti maximumot jelent. $E(\theta)$ kifejezésében E_{max} szorzóját

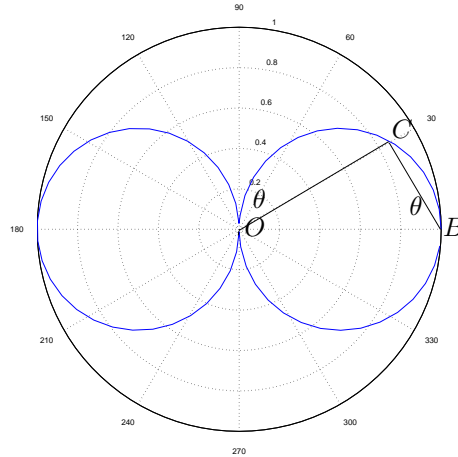


Figure 13: Hertz dipólus iránykarakteristikája

$F(\theta)$ -val jelöljük és *iránykarakterisztikának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $F(\theta)$

maximális értéke 1.

Megmutatjuk, hogy a Hertz dipólus iránykarakterisztikája $\varphi = const.$ síkokban kör. Tekintsük a 13. ábrát. A C-nél lévő szög derékszög, mert ekkor teljesül, hogy a B-nél lévő szög is θ és, hogy az OC szakasz $1 \sin \theta$ -val egyenlő. Ezek szerint θ változása közben C Thales körön mozog. Mivel a Hertz dipólus tere forgásszimmetrikus (φ -tól független), azért térben az iránykarakterisztika ennek a körnek a megforgatásával keletkezett tórusz felület.

Méréssel az iránykarakterisztika úgy állítható elő, hogy a rögzített r_0 távolságnál, θ szögnél fellépő távolférvillamos térerősséget a z tengellyel θ szöget bezáró félegyenesre felmérjük. A különböző θ szögekhez így megszerkesztett pontok adják az iránykarakterisztikát.

Általános esetben az antenna tere nem forgásszimmetrikus, ilyenkor az iránykarakterisztika a φ -nek is függvénye.

$$E(\theta, \varphi) = E_{max} F(\theta, \varphi). \quad (122)$$

A 12. ábrán látható teljesítménysűrűség másféle ábrázolása a *teljesítmény iránykarakterisztika*. A (118) a rögzített r_0 sugáron az alábbi módon írható

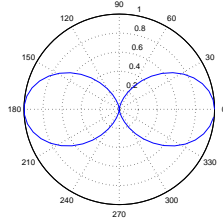


Figure 14: Hertz dipólus teljesítmény iránykarakterisztikája

$$S(\theta) = S(\theta = \pi/2) \sin^2 \theta = S_{max} \sin^2 \theta = S_{max} F^2(\theta), \quad (123)$$

ahol S_{max} irány szerinti maximumot jelent. A Hertz dipólus teljesítmény iránykarakterisztikája a 14. ábrán látható. Ha a tér nem forgásszimmetrikus, akkor a teljesítmény iránykarakterisztika a φ -tól is függ.

$$S(\theta, \varphi) = S_{max} F^2(\theta, \varphi). \quad (124)$$

8.3 Irányhatás, nyereség

Az antenna az iránykarakterisztika maximumának az irányába sugároz optimálisan. Ezt a tulajdonságát egyetlen számmal, az *irányhatással* is kifejezhetjük. Az irányhatás azt mondja meg, hogy r_0 távolságban, a maximális sugárzás irányában a teljesítménysűrűség hányszorosa annak a teljesítménysűrűségnek, ami r_0 távolságban akkor lépne fel, ha az antenna irányfüggetlenül (izotrop módon), egyenletesen sugározná szét a leadott teljesítményét.

$$D = \frac{S_{max}}{S_{ga}} = \frac{S_{max}(r_0)}{P/4\pi r_0^2}, \quad (125)$$

ahol ga gömbfelületre képzett átlagot jelöl. Felhasználva (124)-et az irányhatás kifejezhető a teljesítmény iránykarakteristikával

$$D = \frac{S_{max}}{\frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} S_{max} F^2(\theta, \varphi) r_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (126)$$

S_{max} -al és r_0^2 -el való egyszerűsítés után

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (127)$$

Hertz dipólusra azt kapjuk, hogy $D = 3/2 = 1,76\text{dB}$.

A nyereség abban különbözik az irányhatástól, hogy (125) nevezőjében nem a leadott teljesítmény, hanem az antennába táplált teljesítmény szerepel, ami tartalmazza az antenna ohmos és dielektromos veszteségét is.

$$G = \frac{S_{max}(r_0)}{P_{ossz}/4\pi r_0^2}. \quad (128)$$

9 Csőtápvonalak

A csőtápvonal ideális fémmel határolt cső, amelynek vezérgörbéje leggyakrabban kör vagy téglalap. A csőtápvonalat, mint a mikrohullámú áramkörök építőelemét manapság felváltotta a szalagvonal. Ma elsősorban parabola antennák primer sugárzójaként használatos. Tanulmányozása mégis fontos, mert olyan kérdésekre ad választ, mint hullámterjedés alagútban vagy metróban, továbbá hasznos bevezetőt ad az üvegszálaban történő terjedés vizsgálatához. A csőtápvonalban kialakuló erőterek szép illusztrációi a Maxwell egyenleteknek és a folytonossági egyenletnek.

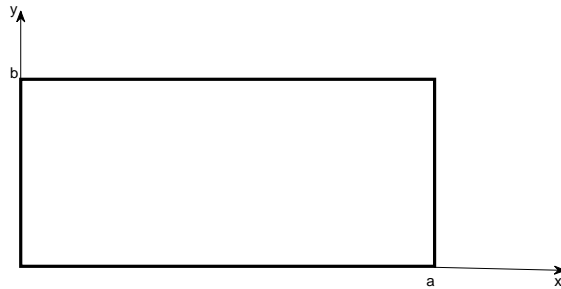


Figure 15: Téglalap keresztmetszetű csőtápvonal

Mi a 15. ábrán látható téglalap keresztmetszetű csőtápvonallal foglalkozunk. A terjedés a z tengely irányában történik, a tér z irányú komponenseit *longitudinális* komponenseknek nevezzük. A terjedési irányra merőleges síkok a

transzverzális síkok, a térnek ezekbe a síkokba eső komponenseit transzverzális komponenseknek nevezzük. Először megmutatjuk, hogy a transzverzális komponensek a longitudinális komponensekből kiszámíthatók. A longitudinális komponenseket pedig a vektoriális hullámegyenletek longitudinális komponenséből határozzuk meg.

9.1 Alapegyenletek

Írjuk fel az első két Maxwell egyenletet Descartes koordinátákban és vegyük figyelembe, hogy z irányban haladó hullámú, $F(x, y) \exp(j\omega t - \gamma z)$ alakú megoldást keresünk, amikor $\partial/\partial t = j\omega$, $\partial/\partial z = -\gamma$.

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega \varepsilon E_x, \quad (129)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon E_y, \quad (130)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \varepsilon E_z, \quad (131)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega \mu H_x, \quad (132)$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu H_y, \quad (133)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z. \quad (134)$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenletekben kizárólag a longitudinális komponensek deriváltjai szerepelnek, ezért a transzverzális komponensek egyszerűen kiszámíthatók. Éspedig (129) és (133)-ból az E_x és H_y , az (130) és (132)-ből az E_y és H_x . Az eredmény

$$E_x = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2} \left[-j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right], \quad (135)$$

$$E_y = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2} \left[j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right], \quad (136)$$

$$H_x = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2} \left[j\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right], \quad (137)$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2} \left[-j\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]. \quad (138)$$

A (135)-(138) kifejezések jobboldala azt sugallja, hogy a terek olyan elemi terek szuperpozíciójaként foghatók fel, amelyek egyikére $H_z = 0$, másikára $E_z = 0$ érvényes, vagyis pl. $E_x = E_x'(H_z = 0) + E_x''(E_z = 0)$. Persze ez a sejtésünk csak akkor igazolódik, ha az elemi terek önmagukban is eleget tesznek a peremfeltételeknek.

Az E_z -t (és később a H_z -t) a vektoriális hullámegyenlet z komponensének a peremfeltételeket is kielégítő megoldása adja.

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) E_z = 0, \quad (139)$$

ahol ismét figyelembe vettük, hogy az adott z és t függés miatt a z szerinti deriválás $-\gamma$ -val való szorzás, a t szerinti deriválás $j\omega$ -val való szorzás.

9.2 A longitudinális komponensre vonatkozó hullámeqyenlet megoldása

A (139) parciális differenciál egyenlet megoldását *szorzat szeparációval* keressük. Feltételezzük, hogy a megoldás egy x -től függő és egy y -től függő rész szorzataként írható fel (innen a *szorzat* a módszer nevében)

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (140)$$

Behelyettesítve (139)-be

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) XY = 0. \quad (141)$$

Végigosztva XY -al

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = 0. \quad (142)$$

Az egyenlet első tagja csak az x -től, a második tagja csak az y -től függ és ennek a két tagnak az összege konstans (a harmadik és negyedik tag összegének mínusz egyszerese). Ez csak úgy lehetséges, hogy az első tag is, a második tag is konstans. Jelöljük ezeket a konstansokat $-k_x^2$ -el, illetve $-k_y^2$ -el.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad (143)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2. \quad (144)$$

Látjuk tehát, hogy mit jelent a *szeparáció* a módszer nevében: szétválasztottuk az x -től és az y -től függő részt, amelyek különálló egyenletek megoldásai.

A konstansok eleget kell, hogy tegyenek a (142) kötésnek.

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = k_x^2 + k_y^2. \quad (145)$$

Ez az ártatlan kinézetű egyenlőség a csőtápvonal elmélet legfontosabb egyenlete: megadja a terjedési tényező és a frekvencia kapcsolatát, vagyis ez a csőtápvonalban terjedő hullámok *diszperziós egyenlete*. Látni fogjuk, hogy a k_x és k_y konstansokat a *peremfeltételek* határozzák meg. Ilyen módon a diszperziós összefüggést befolyásolja az, hogy a hullám csőbe van kényszerítve.

Nézzük most a (143) differenciálegyenlet megoldását. Egyenletünket a $\sin k_x x$ és a $\cos k_x x$ egyaránt kielégíti, így az általános megoldás

$$X(x) = C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x. \quad (146)$$

Hasonlóan (144) megoldása

$$Y(y) = C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y. \quad (147)$$

Tehát a villamos térerősség longitudinális komponense

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y) = (C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x)(C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y). \quad (148)$$

9.3 A peremfeltételek érvényesítése

A C_i konstansok egy részét és a k_x és k_y konstansokat az a peremfeltétel határozza meg, amely szerint a villamos térerősségnek ideális vezető fémfalon nem lehet érintőleges komponense. Abból, hogy E_z -nek $x = 0$ -ra zérusnak kell lennie, következik, hogy $C_2 = 0$, abból, hogy $y = 0$ -ra is zérusnak kell lennie, következik, hogy $C_4 = 0$. Bevezetve a $C = C_1 C_2$ rövidítést kapjuk

$$E_z(x, y) = C \sin k_x x \sin k_y y. \quad (149)$$

A megmaradt C a tér erősségével kapcsolatos és kifejezhető a maximális villamos térerősséggel, vagy a csőben áramló teljesítménnyel. A k_x és k_y konstansok abból a feltételből adódnak, hogy a villamos tér longitudinális komponensének a cső másik két falán, $x = a$ -ra és $y = b$ -re is zérusnak kell lennie.

$$\sin k_x a = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}. \quad (150)$$

Hasonlóan nyerjük

$$k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (151)$$

A fenti egyenletekben m és n pozitív egész számok amelyek - mint látni fogjuk - az erővonalkép strukturájában kapnak szemléletes jelentést.

Behelyettesítve (149)-ot és $H_z = 0$ -t a (135)-(138) egyenletekbe azt kapjuk, hogy a transzverzális komponensek is eleget tesznek a peremfeltételeknek, azaz a villamos térerősség tangenciális komponense és a mágneses térerősség normális komponense zérus a fémfalakon. Korábbi sejtésünk beigazolódott: minden pozitív, egész m -re és n -re létezik olyan hullámforma, amelyben a mágneses térerősségnek nincs longitudinális komponense. Ezeket a tereket TM_{mn} hullámformáknak, vagy TM_{mn} módusoknak nevezzük (TM a Transzverzális Mágneses rövidítése). Matematikai szempontból a módus a vektoriális hullámegyenlet sajátfüggvénye.

k_x és k_y fenti kifejezéseit (145)-be helyettesítve a négyszögkeresztmetszetű csőtápvonal diszperziós egyenletének végleges alakját nyerjük

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (152)$$

Mielőtt a diszperziós egyenlet alapján a hullámterjedés sajátosságait vizsgálnánk, foglalkozunk azokkal a módusokkal, amelyekre $E_z = 0$. Ezek a vektoriális hullámegyenlet z komponensét kielégítő longitudinális mágneses térből vezethetők le.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) H_z = 0, \quad (153)$$

A szorzat szeparáció alapján most az alábbi megoldást választjuk

$$H_z(x, y) = C \cos k_x x \cos k_y y. \quad (154)$$

A szinuszos tagokat elhagytuk azzal a megjegyzéssel, hogy később kiderülne: a peremfeltételeket nem elégítik ki. Mivel H tangenciális komponensére nem ismerjük a peremfeltételt, először (135)-(138)-ból ki kell számítanunk a villamos teret és arra alkalmaznunk a peremfeltételeket.

$$E_x = C \frac{j\omega\mu k_y}{\omega^2 \varepsilon \mu + \gamma^2} \cos k_x x \sin k_y y, \quad (155)$$

$$E_y = -C \frac{j\omega\mu k_x}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \sin k_x x \cos k_y y, \quad (156)$$

$$H_x = C \frac{\gamma k_x}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \sin k_x x \cos k_y y, \quad (157)$$

$$H_y = C \frac{\gamma k_y}{\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2} \cos k_x x \sin k_y y. \quad (158)$$

Az ideális vezető fémfalon érvényes peremfeltételek: a villamos térerősség érintőleges komponense és a mágneses térerősség merőleges komponense zérus kell hogy legyen. Ezek (155)-(158) szerint az $x = 0$ és az $y = 0$ helyeken teljesülnek, az $x = a$ és $y = b$ helyeken pedig akkor, ha - a korábban látott módon - a $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$ választással élünk, ahol m és n pozitív egész, illetve egyikük zérus is lehet. Mivel a villamos térnek csak transzverzális komponense van, a most kapott módusokat Transzverzális Elektromos, TE_{mn} módusoknak nevezzük.

A komponens egyenletekben szereplő C konstans vagy a maximális térerősségre vonatkozó előírásból, vagy a szállított hatásos teljesítményből határozhatjuk meg.

9.4 A diszperziós egyenlet vizsgálata

Térjünk most vissza a (152) diszperziós egyenlethez, amely - mint láttuk - TE és TM módusokra egyaránt érvényes. Oldjuk meg az egyenletet γ -ra

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu}. \quad (159)$$

Ha a gerjesztés frekvenciája nem elég nagy, azaz

$$\omega^2\varepsilon\mu < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (160)$$

akkor γ tiszta valós, $\gamma = \alpha$ és a tér minden komponense

$$f(x, y, z, t) = \Re F(x, y) e^{(j\omega t - \gamma z)} = F(x, y) e^{-\alpha z} \cos \omega t \quad (161)$$

módon leng, azaz *exponenciális helyfüggésű állóhullám*, l. a 16. ábrát. Itt $F(x, y)$ helyébe a (155) - (158) bármelyikét képzelhetjük, ha $F(x, y)$ tiszta képzetes, akkor a \cos helyett előjeles \sin áll. \Re a valós rész képzés jele.

Ha a gerjesztés frekvenciája elég nagy, azaz

$$\omega^2\varepsilon\mu > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (162)$$

akkor γ tiszta képzetes, $\gamma = j\beta$ és a tér minden komponense

$$f(x, y, z, t) = \Re F(x, y) e^{j(\omega t - \beta z)} = F(x, y) \cos(\omega t - \beta z) \quad (163)$$

haladóhullám formájában terjed a pozitív z tengely irányában.

Határesetben γ éppen zérus és ez határozza meg az adott módus *határfrekvenciáját*, vagy *levágási frekvenciáját*.

$$\omega_h^{mn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (164)$$

$$f_h^{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (165)$$

A határfrekvencia a cső jellemzője. Ha a gerjesztés frekvenciája kisebb, mint az adott módus határfrekvenciája, akkor a módus exponenciális helyfüggésű állóhullám módjára lecseng a csőben. Ha a gerjesztés frekvenciája nagyobb, mint a módus határfrekvenciája, akkor a módus csillapítatlan haladó hullám módjára terjed. A diszperziós görbék a 17. ábrán rajzoltuk fel. Az ábra $b = 2a$ esetén érvényes. A frekvenciát a k_0a normalizált formában használtuk. $a > b$ esetén az *alaplómódus* (a legalacsonyabb határfrekvenciájú módus) a TE_{10} módus. A szaggatott vonal azt mutatja, hogy valamely frekvencián mindazon módusok terjednek (létezik a fázistényezőjük), amelyek határfrekvenciája az adott frekvenciánál alacsonyabb.

9.5 A TE_{10} módus tere

A TE_{10} módus terét megkapjuk, ha (155)-(158)-be, továbbá (154)-be $m = 1$ -et és $n = 0$ -t helyettesítünk. Feltételezzük, hogy az üzemi frekvencia az alapmódus határfrekvenciájánál nagyobb, így $\gamma = j\beta$.

$$E_x = 0, \quad (166)$$

$$E_y = -C \frac{j\omega\mu\frac{\pi}{a}}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \sin \frac{\pi}{a}x, \quad (167)$$

$$H_x = C \frac{j\beta\frac{\pi}{a}}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \sin \frac{\pi}{a}x, \quad (168)$$

$$H_y = 0, \quad (169)$$

$$H_z = C \cos \frac{\pi}{a}x. \quad (170)$$

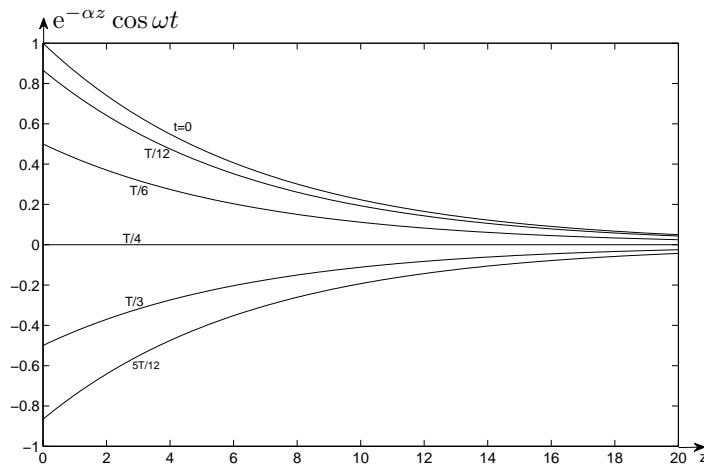


Figure 16: Exponenciális helyfüggésű állóhullám

Ezt a teret a 18. ábrán mutatjuk be. Az $n = 0$ következménye, hogy a tér az y -tól független. Az ábrán y irányban mozogva valóban nem tapasztalunk változást. A villamos térnek csak y komponense van, az erővonalak sűrűsége (167) szerint x irányban szinuszosan változik. A haladóhullám $\cos(\omega t - \beta z)$ tényezője z irányban is szinuszos függést ad, ezt azonban az áttekinthetőség érdekében nem ábrázoltuk; a teret csupán egyetlen transzverzális síkban rajzoltuk meg. Valójában a villamos erővonalak olyan köteget alkotnak, amelyben az erővonalasűrűség x irányban is és y irányban is szinuszosan változik.

A mágneses térnek x és z komponense is van. Mivel az x komponens szinuszos, a z komponens koszinuszos, azért az $x = a/2$ helyről az x tengely irányában elmozdulva az x komponens csökken, a z komponens nő, vagyis a mágneses tér fokozatosan z irányába kanyarodik. Itt is csupán "szintenként" egy erővonalat rajzoltunk meg. Befelé, (a zárt görbe középpontja felé) haladva további zárt erővonalakat kellene rajzolni úgy, hogy az erővonalasűrűség mind x , mind z irányban koszinusz szerint csökkenjen. A 19. ábrán magasabb módusok erővonalképe látható. Nyilvánvaló, hogy ha $\sin \frac{\pi}{a}x$ helyett $\sin \frac{3\pi}{a}x$ szerepel, akkor az $m = 1$ -re érvényes erővonalképet háromszor kell egymás mellé rajzolniuk váltakozó előjellel. Ugyanez a szabály érvényes az n sokszorozódása esetére is. Vagyis a TE_{32} módus erővonalképét úgy kapjuk, hogy a TE_{11} erővonalképét háromszor rajzoljuk le egymás mellé váltakozó előjellel (az erővonalak nyílrányának változtatásával) és kétszer egymás fölé ugyancsak váltakozó előjellel.

9.6 A TE_{10} módusban szállított teljesítmény

Meghatározzuk, hogy adott maximális villamos térerősség esetén mekkora hatásos teljesítmény áramlik a csőben.

A (167) szerint a maximális villamos térerősség a cső közepén lép fel és nagysága

$$E_{\max} = E_y(x = \frac{a}{2}) = C \frac{\omega\mu}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} \frac{\pi}{a}. \quad (171)$$

Igy a C konstans kifejezhető a maximális villamos térerősséggel

$$C \frac{\omega\mu\pi/a}{\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2} = E_{\max}. \quad (172)$$

Ezt a (167) és (168)-be helyettesítve

$$E_y = -jE_{\max} \sin \frac{\pi}{a}x, \quad (173)$$

$$H_x = E_{\max} \frac{j\beta}{\omega\mu} \sin \frac{\pi}{a}x. \quad (174)$$

Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{S}_k = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ komplex Poynting vektornak csaka z komponense valós, így - ami a fizikai szemléletből is világos - csak a terjedés irányában történik teljesítmény áramlás.

A Poynting vektor z komponensének valós része, azaz az időátlag

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2} \Re \left\{ - \left(-jE_{\max} \sin \frac{\pi}{a}x \right) E_{\max} \frac{-j\beta}{\omega\mu} \sin \frac{\pi}{a}x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega\mu} E_{\max}^2 \sin^2 \frac{\pi}{a}x \end{aligned}$$

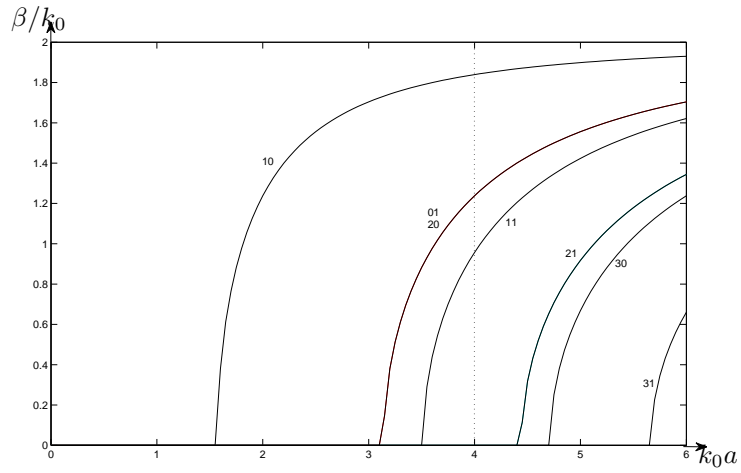


Figure 17: Téglalap keresztmetszetű csőtápvonal diszperziós görbéi. $\epsilon_r = 4$

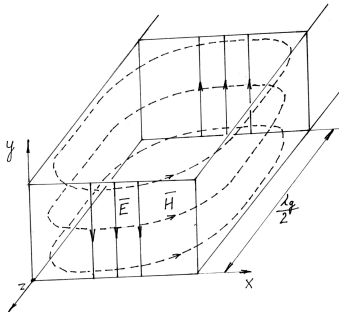


Figure 18: A TE_{10} módus tere.

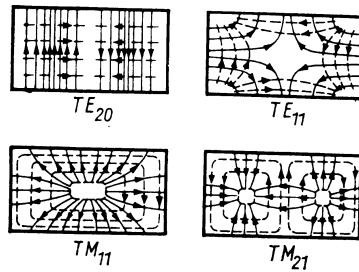


Figure 19: Néhány magasabb módus tere.

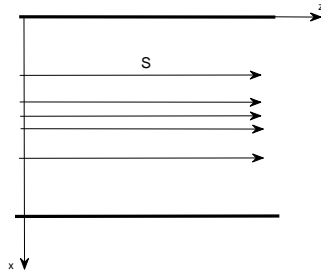


Figure 20: Teljesítmény áramlása csőben

Az eredményt a 20. ábra mutatja. A csőtápvonalban úgy áramlik az energia, mint a vízvezetékben a víz. A szállított teljesítményt a Poynting vektor felületi integráljaként kapjuk.

$$P = \int_{x=0}^a \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu} E_{\max}^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x b dx = \frac{ab}{4} \frac{\beta}{\omega \mu} E_{\max}^2. \quad (175)$$

Példaképpen tekintsük az X sávban (8,2-12,4 GHz) használatos R-100 jelű csőtápvonalat, amelynek méretei $a=22,8$ mm, $b=10,16$ mm, a TE_{10} módus határfrekvenciája $f_h = 6,56$ GHz. Határozzuk meg az átvihető teljesítményt $f = 1,5 f_h = 9,84$ GHz-en, (kimutatható, hogy ezen a frekvencián minimális a falvesztés). E_{\max} legyen egyenlő a levegő $30 \cdot 10^5$ V/m-es átütési szilárdságával. A (159)-ből $\beta = 153 \text{ m}^{-1}$. Az (175)-ből $P = 1,029$ MW. 2-es biztonsági tényezővel 500 kW-ot kapunk.

9.7 A TEM módus

Tekintsük a (129)-(134) egyenleteket. Lehetséges-e olyan megoldásuk, hogy sem \mathbf{E} -nek, sem \mathbf{H} -nak nincs longitudinális komponense?

$H_z = 0$ -ra és $E_z = 0$ -ra (129) és (133) az alábbi lesz

$$j\omega \varepsilon E_x - \gamma H_y = 0, \quad (176)$$

$$-\gamma E_x + j\omega \mu H_y = 0. \quad (177)$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van triviálistól különböző megoldása, ha a determinánsa zérus, azaz ha

$$\gamma = j\omega \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad \beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (178)$$

Ekkor az ismeretlenek viszonya

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{j\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (179)$$

A (130) és (132)-ből (178)-el megegyező eredményt kapunk, (179) megfelelője pedig

$$\frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (180)$$

A (179) és (180) egyenletbe foghatók

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} \times \mathbf{k}, \quad (181)$$

ahol \mathbf{k} a terjedés irányú egységvektor. Ez azt jelenti, hogy a tiszta transzverzális \mathbf{E} és, \mathbf{H} merőlegesek egymásra. Mivel ez a hullámforma TE is és TM is, TEM módusnak nevezzük. Fázis tényezője megegyezik az ε , μ jellemzőjű anyagban terjedő síkhullám fázis tényezőjével.

A (134) egyenlet $H_z = 0$ esetén azonos a $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ -val. Eszerint a TEM módus villamos tere megegyezik az adott vezető elrendezés elektrosztatikus terével. Ismeretes, hogy zárt fémvezető belsejében (egyszeresen összefüggő tartomány) a villamos térerősség zérus. Zérustól különböző sztatikus tér létrejöttéhez legalább két vezető kell (legalább kétszeresen összefüggő tartomány). A 15. ábrán látható csőben TEM módus nem létezik, a kétvezetős Lecher vezetékben és a koaxiális kábelben ellenben igen. A távvezetékek tanulmányozásánál a TEM módus vizsgálatára szorítkoztunk.

10 A mikroszalag vonal

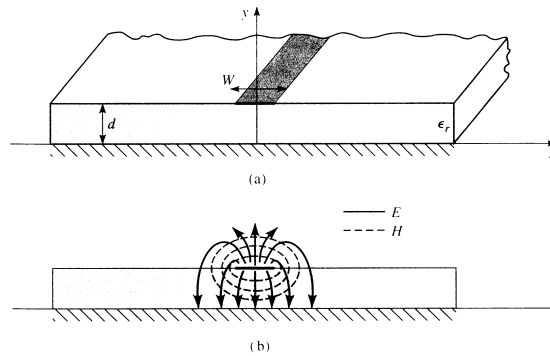


Figure 21: A mikroszalag vonal

A mikroszalag vonal népszerű a planáris távvezetékek között, mert fotolitográfias eljárással gyártható és könnyen integrálható más passzív és aktív mikrohullámú eszközökkel. A geometria a 21. ábrán látható. A W szélességű vezető vékony, földelt szigetelő szubsztrátumra van nyomtatva. A szubsztrátum vastagsága d , relatív permittivitása ε_r .

Az inhomogén dielektrikum megnehezíti a mikroszalag vonal analízisét. A tér egy része a szigetelőben a szalag és az alaplemez között koncentrálódik, a másik, kisebb része a levegőben lép fel. Ennek következtében az elrendezés nem hozhat TEM hullámot, mert annak a fázissebessége a szigetelőben $c/\sqrt{\varepsilon_r}$ lenne,

míg a levegőben a TEM hullám c fázissebességet követelne meg. Ez a kétféle sebesség nem tesz lehetővé illeszkedést a szigetelő-levegő határon. A mikroszalag vonal valódi tere tehát TE-TM hibrid.

A szigetelő vastagsága azonban a hullámhosszhoz képest nagyon kicsi, így a tér kvázi TEM, vagyis lényegében ugyanolyan, mint sztatikus esetben. Ekkor a fázissebesség és a fázistényező az alábbi formában fejezhető ki

$$v = c/\sqrt{\varepsilon_e}, \quad (182)$$

$$\beta = k_0\sqrt{\varepsilon_e}, \quad (183)$$

ahol ε_e a mikroszalag vonal effektív permittivitása. Mivel a villamos erővonalak részben a szigetelőben, részben a levegőben vannak, azért

$$1 < \varepsilon_e < \varepsilon_r \quad (184)$$

és ε_e függ a szubsztrátum d vastagságától és a szalag W szélességétől. A számításigényes numerikus megoldások eredményeit a gyakorlatban jól használható empirikus formulákban foglalták össze. Ezeket ismertetjük a továbbiakban.

10.1 Formulák az effektív permittivitásra és a hullámenállásra

A mikroszalag vonal effektív permittivitása közelítőleg

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12d/W}}. \quad (185)$$

Adott méretek mellett a hullámenállás

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_e}} \ln \left(\frac{8d}{W} + \frac{W}{4d} \right) \quad \text{ha } W/d < 1 \quad (186)$$

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_e}[W/d + 1.393 + 0.667 \ln(W/d + 1.444)]} \quad \text{ha } W/d > 1. \quad (187)$$

Fordítva: előírt hullámenállás és adott relatív permittivás esetén a W/d viszony meghatározható

$$\frac{W}{d} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad \text{ha } W/d < 2 \quad (188)$$

$$\frac{W}{d} = \frac{2}{\pi} \left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\varepsilon_r} \right\} \right], \quad \text{ha } W/d > 2 \quad (189)$$

ahol

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r} \right) \quad (190)$$

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\varepsilon_r}}. \quad (191)$$

A hullámenállás és effektív permittivás meghatározására példát mutatunk be.

Határozzuk meg a szélességét és a hosszát annak a mikroszalag vonalnak, amelynek hullámellenállása 50Ω és fázistolása 2.5 GHz-en 90° . A szubsztrátum vastagsága $d=0.127$ cm, $\varepsilon_r = 2.20$.

Először a $Z_0 = 50\Omega$ -hoz tartozó W/d -t keressük meg feltételezve, hogy $W/d > 2$. $B = 7.985$, $W/d = 3.081$. Mivel $W/d > 2$ adódott, az eredményt elfogadjuk, egyébként a $W/d < 2$ -re érvényes formulát kellene használnunk. $W = 3.081d = 0.391$ cm. (185)-ből az effektív permittivitás

$$\varepsilon_e = 1.87. \quad (192)$$

A 90° -os fázistoláshoz szükséges vonalhossz

$$90^\circ = \pi/2 = \beta l = \sqrt{\varepsilon_e} k_0 l \quad (193)$$

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c} = 52.35 \text{ m}^{-1} \quad (194)$$

$$l = \frac{\pi/2}{\sqrt{\varepsilon_e} k_0} = 2.19 \text{ cm}. \quad (195)$$

11 Az üvegszál, mint hullámvezető