

Segédlet az Elektromágneses terek tantárgy anyagának elmélyítéséhez

Pávó József

2017. január 1.

Tartalomjegyzék

1. Az elektrodinamika témakörébe tartozó jelenségek csoportosítása	2
1.1. Az elektromágneses tér időbeli és térbeli változási sebességének kapcsolata	2
1.2. Statikus terek: $d \ll \lambda$ vagy $d \ll \delta$	3
1.3. Kvázistacionárius (örvényáramú) terek: $d \ll \lambda$ és $d \approx \delta$	4
1.4. Elektromágneses hullámok: $d \approx \lambda$ és $d \gg \delta$	4
1.5. Geometriai optika: $d \gg \lambda$	5
1.6. A felosztás értelmezése a terjedési sebességekkel	6
1.7. A vizsgálandó elrendezés összetettsége	6
2. Tértfogati anyaghiba modellezése az örvényáramú roncsolásmentes anyagvizsgálatban	8
2.1. A térfogati anyaghibát leíró integrálegyenlet	9
2.2. A térfogati anyaghiba örvényáramú válaszjelének számítása	13
2.2.1. A mágneses tér változásának számítása	13
2.2.2. Az impedancia-változás számítása	14
2.2.3. A mágneses tér értékeinek meghatározása az impedancia-változás képletével	15
3. Síkhullámok	17
3.1. TE és TM polarizációjú síkhullámok	17
3.2. Síkhullámok által szállított teljesítmény	24
3.3. A síkhullám fizikai értelmezése és néhány gyakorlati alkalmazása	26
3.4. Ferdén beeső síkhullám viselkedése anyaghatáron	27
3.4.1. A törési törvény	27
3.4.2. A reflektált és a továbbhaladó síkhullámok amplitúdójának meghatározása	28
3.5. Elektromágneses hullámtér felbontása síkhullámok összegére	32
3.5.1. A térerősségvektorok térbeli Fourier-transzformáltja	33
3.5.2. A hullámegyenlet megoldása térbeli Fourier-transzformációval	34
3.5.3. Az EM hullámtér felírása	35
Hivatkozások	37

1. fejezet

Az elektrodinamika témakörébe tartozó jelenségek csoportosítása

Az elektrodinamika témakörébe tartozó jelenségeket a Maxwell-egyenletekkel leírt axiómarendszer alapján tárgyaljuk. Ezek az egyenletek lineáris és izotrop közegekben a következő alakban írhatók fel:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.4)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{J}_b, \quad (1.5)$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}, \quad (1.6)$$

ahol \vec{E} az elektromos térerősség, \vec{D} az elektromos eltolás, \vec{H} a mágneses térerősség és \vec{B} a mágneses fluxussűrűség vektorai. ε , μ és σ az anyagot jellemző permittivitás, permeabilitás és vezetőképesség. \vec{J} az áramsűrűség és ρ a töltéssűrűséget jelöli. \vec{E}_b és \vec{J}_b a külső források által beiktatott elektromos térerősség és áramsűrűség.

1.1. Az elektromágneses tér időbeli és térbeli változási sebességének kapcsolata

Az (1.1)-(1.4) Maxwell-egyenletek térbeli- és időbeli parciális deriváltakat tartalmazó differenciálegyenletek. Az egyenletek természetéből adódóan a térbeli és az időbeli változások gyorsasága között összefüggés van. Ha egy f frekvenciával változó, állandósult állapotban lévő elektromágneses (EM) teret vizsgálunk, akkor – homogén anyagjellemzők esetében – az ehhez tartozó térbeli változások gyorsaságát szigetelőkben a λ hullámhossz, vezetőkben

pedig a δ behatolási mélység jellemzi. Ezek értéke a következő módon számítható:

$$\lambda = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{f} \quad (1.7)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (1.8)$$

ahol $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ a fény terjedési sebessége az adott szigetelőben.

A gyakorlatban használatos anyagokat nem mindig lehet egyszerűen fémeknek és szigetelőknak tekinteni, nagyon sok egyéb, elektromos szempontból is fontos anyag létezik. Ilyenek a félvezetők, vezető részecskéket tartalmazó folyadékok, az ionizált szilárd részecskéket tartalmazó közegek, stb. A fizikai folyamatok modellezésével, egy adott időbeli változási sebességhez, ezekben az esetekben is lehet valamilyen térbeli változási gyorsaságot társítani. Az esetek jelentős részében a transzportfolyamatban résztvevő objektumok tehetetlensége határozza meg azt, hogy egy bizonyos időbeli változási sebességhez milyen térbeli változási gyorsaság tartozik. Így tehát ilyen anyagok esetében is tudunk értelmezni olyan hosszjellemzőket, mint amilyeneket λ és δ formájában értelmeztünk szigetelők és fémek esetében. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak szigetelőkről és fémekről beszélünk, az elmondottakat azonban ki tudjuk terjeszteni bonyolultabb anyagok figyelembevételére is.

A EM tér térbeli változásának gyorsaságát az időbeli változáson kívül az elhelyezkedő objektumok méretei is befolyásolják, más szóval az EM téreloszlás változása követi az anyagjellemzők térbeli változását is. Az anyagjellemzők változását a térben elhelyezett objektumok és a vizsgált térrész tipikus befoglaló méreteivel szokták jellemezni, ezt a továbbiakban d -vel jelöljük.

Attól függően, hogy az EM tér – a d -vel jellemzett – anyagjellemzők változásából fakadó, illetve – a λ -val vagy a δ -val jellemzett – időbeli változásból fakadó, térbeli változási gyorsasága hogyan viszonyul egymáshoz, különböző egyszerűsítő feltételezésekkel élhetünk. E egyszerűsítő feltételezések alapján az elektrodinamikát a következőkben tárgyalt különböző tématerületekre tudjuk osztani [1], [2].

1.2. Statikus terek: $d \ll \lambda$ vagy $d \ll \delta$

Statikus terekről beszélhetünk abban az esetben, amikor az objektumok méretei nagyon kicsik a hullámhosszhoz képest, azaz ha $d \ll \lambda$, vagy áramlási térben $d \ll \delta$. Ebbe a körbe tartoznak az elektrodinamika következő tématerületei:

- elektrosztatika
- magnetosztatika
- stacionárius áramlási tér
- stacionárius áramok mágneses tere

A felsorolt témakörökre igaz az, hogy a térjellemzők időbeli deriváltjait elhanyagoljuk. Ebből adóan az (1.1)-(1.4) Maxwell-egyenletek szétesnek olyan parciális differenciálegyenletekre, amelyekben vagy csak az elektromos, vagy csak a mágneses térjellemzők

találhatók. Ez az oka annak, hogy ilyen esetben az elektromos és mágneses tér nincsenek egymással kölcsönös kapcsolatban. Egyirányú kapcsolat persze ekkor is lehetséges. Például az elektromos áramlási térben folyó áramok mágneses teret hoznak létre, de visszahatás nincs, mivel a mágneses tér jelenléte nem fogja befolyásolni az áramlási teret.

Hangsúlyozni kell, hogy a statikus terek esetében is elképzelhető időbeli változás csak ez olyan lassú, hogy arra a $d \ll \lambda$ vagy $d \ll \delta$ feltétel áll. Ilyen esetekben az időbeli változást úgy lehet figyelembe venni, hogy az idő minden pillanatában egy-egy statikus térre vonatkozó feladatot oldunk meg. Lineáris közeg esetében ez valójában azt jelenti, hogy csak egy feladatot oldunk meg és a kapott megoldást súlyozzuk az időben változó gerjesztés nagyságával.

A fenti gondolatmenet oldja fel például azt az ellentmondást, hogy nagyfrekvenciás áramkörben a kondenzátorok olyan kapacitás értékeivel számolunk, amelyeket elektrosztatikus számításokkal kaptunk meg. Ebben az esetben az elektrosztatikus számítások alkalmazhatóságához ugyanis csak arra van szükségünk, hogy a kondenzátor fizikai méreteihez képest legyen nagyon nagy a hullámhossz.

1.3. Kvázistacionárius (örvényáramú) terek: $d \ll \lambda$ és $d \approx \delta$

Kvázistacionárius (vagy más néven: örvényáramú) térről beszélünk akkor, ha jól vezető anyagot és annak szigetelő környezetét vizsgáljuk olyan frekvencián, amelyen a vezető mérete összemérhető a behatolási mélységgel ($d \approx \delta$), ugyanakkor ez sokkal kisebb a szigetelőben számítható hullámhossznál ($d \ll \lambda$).

Ilyen esetben az (1.1) jobb oldalán lévő $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ tagot hanyagoljuk el. Ennek következtében a vezető anyagban az elektromos és mágneses tér csatolásban van egymással, hiszen (1.1) és (1.2) egyenletekben – a $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ anyagegyenletnek köszönhetően – elektromos és mágneses térjellemezők is megjelennek. A szigetelő anyagban viszont nincs kölcsönös csatolás, mivel ott az elektromos tér nem befolyásolja a mágneses teret, mivel (1.1) jobb oldalán nincs vezetési áram, legfeljebb csak – a $\vec{J} = \vec{J}_b$ egyenletből – az elektromos tértől független beiktatási áram áll.

A kvázistacionárius tér egy köztes állapotot jelent a statikus- és a hullámtér között. Ha csökken a frekvencia a vezetőben – a $d \ll \delta$ reláció miatt – kialakul egy stacionárius áramlási tér, amíg a szigetelőben – a $d \ll \lambda$ feltétel miatt – is statikus tér alakul ki.

Amennyiben a frekvencia nő, a $d \gg \delta$ feltétel teljesül. Ez azt jelenti, hogy a vezetőben folyó áramok annak felületére koncentrálnak. Ebben az esetben célszerű a vezetőt magát kizárni a vizsgálandó tartományból és csak az annak a felületén folyó felületi áramokat figyelembe venni. Ha ezt tesszük, akkor a hullámjelenségek témakörébe jutottunk.

1.4. Elektromágneses hullámok: $d \approx \lambda$ és $d \gg \delta$

Elektromágneses hullámokat vizsgálva a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét (1.1)-(1.4) kell figyelembe vennünk és megoldanunk. Tipikusan ez az eset mikrohullámú eszközök, antennák, stb. analízisekor. Ebben az esetben a mágneses és elektromos tér a szigetelőben is mindkét irányban csatolásban van egymással, ez a kapcsolat teszi lehetővé az EM hullámok kialakulását, terjedését, egyszóval a hullámjelenségeket. A jól vezető anyagok

ebben az esetben a vizsgálati tartományból kizárásra kerülnek és csak a felületükön folyó áramokat vesszük figyelembe. A rossz vezető anyagokra – a veszteséges dielektrikum fogalmának bevezetésével – egyfajta speciális szigetelőként tekintünk.

Hullámterek analízise során tipikusan időben szinuszosan változó EM teret vizsgálunk. Ennek analízisével egy adott frekvencián kialakuló energiaviszonyokra vonatkozóan kapunk hasznos következtetéseket (ilyenek például egy antenna esetében a bemeneti impedancia, a sugárzási karakterisztika, az antennanyereség, illetve a kisugárzott energiasűrűség, stb.). Egy frekvencián végzett analízis azonban nem tud teljes felvilágosítást adni például arra, hogy milyen interferencia alakul ki az egyes szimbólumok között (mondjuk a többutas terjedésnek nevezett jelenség következtében). Ilyen esetekben két lehetőségünk van. Az egyik az, hogy a szimbólumok figyelembevételével időfüggő megoldását keressük a Maxwell-egyenleteknek, a másik pedig az, hogy a vivő frekvencia környékén lévő frekvenciákra is elvégezzük a harmonikus analízist amely eredményeit a Fourier-transzformáció segítségével értelmezzük.

1.5. Geometriai optika: $d \gg \lambda$

Amennyiben az objektumok jellemző mérete sokkal nagyobb a hullámhossznál a geometriai optika szabályai alapján tudjuk megadni a kialakuló EM teret. Itt – szemben az előzőekben tárgyalt esetekkel – nem arról van szó, hogy az egyenleteket valamilyen módon egyszerűsítjük bizonyos tagok elhanyagolásával hanem sokkal inkább arról, hogy egy kitüntetett megoldással – a síkhullám EM terével – kívánjuk leírni a jelenségeket.

Egy adott irányba terjedő síkhullám a Maxwell-egyenletek egy speciális megoldása amelyet azzal a feltételezéssel kapunk, hogy az EM tér adott – a terjedés irányára merőleges – síkokban nem változik. A 3.5 részben belátjuk, hogy lineáris szigetelőben tetszőleges megoldása a Maxwell-egyenleteknek előállítható különböző irányokba terjedő síkhullámok szuperpozíciójaként, pontosabban megfogalmazva végtelen sok, egyenként infinitezimális energiájú síkhullámok összegeként, ezt a leírást síkhullám-spektrumként történő megadásnak hívjuk.

Tekintsük azt az esetet, amikor egy adott irányba terjedő síkhullám megvilágít egy véges méretű tükröző felületet. A reflektált EM tér leírható síkhullám spektrumként, amely spektrum szélessége attól fog függeni, hogy mekkorák a tükröző felület geometriai méretei. Amennyiben ezek összemérhetők a hullámhosszal ($d \approx \lambda$), a spektrum széles lesz és változatos reflektált teret kapunk, ez az eset tartozik az előzőekben tárgyalt elektromágneses hullámok témakörébe. Ha viszont a tükröző felület sokkal nagyobb a hullámhossznál ($d \gg \lambda$) a spektrum nagyon keskeny lesz (gyakorlatilag csak egy síkhullám alkotja azt).

Ezt a jelenséget úgy lehet magyarázni, hogy a tükröző felület középső tartománya úgy kezelhető, mintha az végtelen távolságban lenne annak széleitől (a hullámhossz 5 – 10-szerese már közelítőleg végtelen távolságnak számít), ebből adódóan a középső tartományban úgy viselkedik a tér, mintha az egy végtelen kiterjedésű felület került volna megvilágításra. Ez a reflexió felelős a spektrum domináns komponenséért. Amennyiben a felület teljes mérete sokkal nagyobb a szélein lévő néhány hullámhossz szélességű sávnál, akkor a domináns síkhullámon kívüli komponensek elhanyagolhatók.

Ha tehát a reflektáló felület méretei sokkal nagyobbak a hullámhossznál, akkor a reflexiót könnyű közelítőleg úgy leírni, hogy a reflektált teret egy végtelen felületről való reflexióként vesszük figyelembe, azaz a geometriai optika szabályai alapján számítjuk ki

a reflektált síkhullám irányát és fázisát, energiáját pedig egyszerűen súlyozzuk a besugárzott felület és a reflektáló felület arányában. Ez a gondolatmenet az alapja $d \gg \lambda$ feltételnek elegendő elrendezések analíziséhez használt ún. sugárkövetési (ray tracing) számítási módszereknek.

Vegyük észre, hogy a $d \gg \lambda$ esetében szinte lehetetlen lenne a Maxwell-egyenletek teljes megoldását megadni, mivel a számítási tartomány nagysága nem tenné lehetővé – még szinte végtelen számítási kapacitás esetében sem – azt, hogy a térrészt egy numerikus módszer kívánalmainak megfelelően diszkrétizálni lehessen.

1.6. A felosztás értelmezése a terjedési sebességekkel

A fenti felosztást szemléletesen érzékeltetni és értelmezni lehet az egyes közegekben történő információ és energiaáramlás sebességével. Statikus problémát kell ugyanis vizsgálnunk abban az esetben ha a jel fizikai terjedését meghatározó sebesség figyelembevételével az elrendezés bejárásához szükséges idő alatt a gerjesztő jel nem változik meg számottevően. Más szóval számíthatunk arra, hogy az időbeli változások elég lassúak ahhoz, hogy minden időbeli elmozdulás után az adott gerjesztési szinthez tartozó állandósult állapot eléréséhez van elegendő idő.

A kvázisztracionárius tereknél éppen azért van az említett kettősség – miszerint a szigetelőben statikus, a vezetőben pedig hullámtér van – mert a vezetőkben az energia terjedését a szigetelőkben mérhető fény terjedési sebességénél jelentősen kisebb sebességű transzportfolyamatok határozzák meg.

1.7. A vizsgálandó elrendezés összetettsége

A valóságban az analizálandó elrendezések nem mindig tisztán a felsorolt témakörök egyikébe tartoznak. Sokkal gyakoribb az az eset, hogy a térszámítási problémának bizonyos részei az egyik, más részei pedig egy másik témakörbe tartoznak.

Gyakran fordul elő még olyan eset is, amikor az elrendezés egyik dimenziója szerint statikusként, másik dimenziója szerint pedig hullámjelenségként kezelhető. Tipikus példa erre az esetre a koaxiális kábel. Itt a kábel hossz tengelyére merőleges irányban a méretek nagyon kicsik a hullámhosszhoz képest. Ez az oka annak, hogy a kábel jellemezhető statikus számítások eredményeként kapott hosszegységre eső kapacitással, induktivitással, vezetéssel és ellenállással. A kábel viselkedése a tengely irányában viszont már a távíró-egyenletek (egydimenziós hullámegyenlet) megoldásaként kapható. Más szavakkal azt mondhatjuk, hogy a kábel hossz tengelye mentén hullámjelenséget, erre merőlegesen pedig statikus teret feltételezünk.

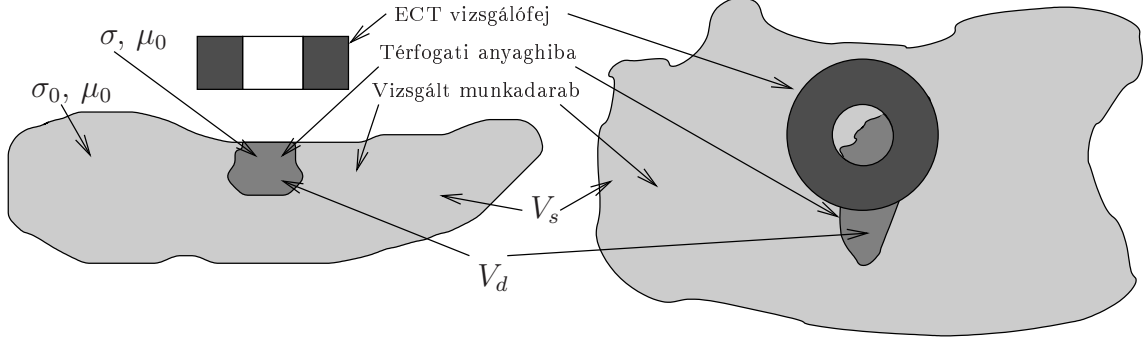
2. fejezet

Térfogati anyaghiba modellezése az örvényáramú roncsolásmentes anyagvizsgálatban

Ebben a részben egy példát szeretnénk mutatni arra, hogy miként lehet integrálegyenletek segítségével bonyolult térszámítási probléma numerikusan hatékony megoldását adni. Célunk csupán az, hogy felírjunk egy valóságos mérnöki problémához kapcsolódó olyan integrálegyenletet, amelyben vektoriális változókat és diadikus Green-függvényeket használunk. Az integrálegyenletet a [3] irodalomban közöltek alapján írjuk fel. Az integrálegyenlet numerikus megoldását nem részletezzük.

A tárgyalandó példa gyakorlati felhasználása az örvényáramú roncsolásmentes anyagvizsgálathoz kapcsolódik. A vizsgálati módszer lényege, hogy egy árammal gerjesztett tekercset mozgatunk a vizsgálandó, vezető anyagból lévő munkadarab felett és a tekercs minden pozíciójában mérjük annak feszültségét (vagy impedanciáját). A vizsgálat végső célja az, hogy a mért értékekből meghatározzunk az anyagban található anyaghiba paramétereit (méretét, vezetőképességét, stb.). Az esetek egy részében megelégszünk már azzal is, hogy megkülönböztetjük a hibátlan munkadarabokat azoktól, amelyekben valamilyen anyaghiba található. Az anyaghiba paramétereinek meghatározásához feltétlenül szükség van arra, hogy számítással meg tudjuk jósolni egy ismert paraméterekkel rendelkező anyaghiba hatására mért jelet. Az elkövetkezőkben bemutatásra kerülő integrálegyenlet megoldása éppen e jel meghatározására szolgál.

Az anyaghiba paramétereinek meghatározása egyébként egy inverz problémának tekinthető, amelyhez tartozó direkt probléma megoldására mutatunk a következőkben egy számítási modellt. Az örvényáramú anyagvizsgálati módszert (angolul Eddy Current Testing: ECT) az iparban kiterjedten használják nagy igénybevételnek kitett, kritikus szerkezetek roncsolásmentes vizsgálatára. Ilyen alkalmazások pl.: atomreaktorok hőcserélőinek, repülőgépek turbinalapátjainak, helikopterek rotorlapátjainak, stb. vizsgálata. A vizsgálati módszerek szimulációjára és tervezésére célszoftverek állnak a mérnökök rendelkezésére, ezek legjelentősebb példája a CEA által fejlesztett CIVA szoftver [4], amelynek ECT szimulációjára szolgáló részét a bemutatásra kerülő integrálegyenletre alapozva írták meg a fejlesztők (a fejlesztésben a BME-HVT is rendszeresen közreműködik [5]).



2.1. ábra. ECT vizsgálófej egy térfogati anyaghibát tartalmazó munkadarab felett

2.1. A térfogati anyaghibát leíró integrálegyenlet

Tekintsük a 2.1. ábrán látható elrendezést, ahol egy örvényáramú vizsgálófej található a V_s térfogatban elhelyezkedő vizsgálandó munkadarab felett. A munkadarab $\sigma(\vec{r})$ vezetőképessége (\vec{r} a helyvektort jelöli) a V_d térfogat kivételével ugyanaz mindenhol, és ennek értéke σ_0 (azaz: $\sigma(\vec{r}) = \sigma_0$, $\vec{r} \in V_s \setminus V_d$). A térfogati anyaghiba azon V_d térrészben helyezkedik el, ahol a vezetőképesség eltér σ_0 -tól. A munkadarab és a benne lévő anyaghiba anyaga nem mágneses, így ezek permeabilitása μ_0 .

A vizsgálófejet időben szinuszosan változó, ω körfrekvenciájú árammal gerjesztjük, feltételezzük, hogy az elrendezés lineárisnak tekinthető anyagjellemzőkkel bíró térrészekből áll, és az időbeli változás tekintetében már kialakult az állandósult állapot. A komplex számítási módszer alkalmazásával [1] a térjellemzők komplex csúcserőértékét használjuk. Jelölje pl. $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ az elektromos térerősség komplex csúcserőértékét az \vec{r} helyen, ennek ismeretében a térjellemző vektorának időfüggvényét a $\text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \exp(j\omega t) \right\}$ kifejezéssel kaphatjuk meg, ahol a $\text{Re} \{ \cdot \}$ a komplex kifejezés valós részét jelöli.

Az eltolási áram elhanyagolásával, valamint a $\vec{J}(\vec{r})$ elektromos áramsűrűség és $\vec{E}(\vec{r})$ elektromos térerősség komplex csúcserőértékei között kapcsolatot teremtő, $\vec{J}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$, anyagjellemzőre vonatkozó egyenlet figyelembevételével, a vizsgálandó munkadarab V_s térfogatában az első és második Maxwell-egyenlet a következő alakban írható:

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}), \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r}), \quad (2.2)$$

ahol \vec{H} a mágneses térerősség komplex csúcserőértékét jelöli. (2.1) átrendezésével kapjuk a

$$\text{rot } \vec{H}(\vec{r}) = \sigma_0\vec{E}(\vec{r}) + [\sigma(\vec{r}) - \sigma_0]\vec{E}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

alakot, ahol a jobb oldal második tagját felfoghatjuk úgy, mint egy külső, áramsűrűség jellegű forrást, amely a V_d térfogatra koncentrálódik. E forrás fogja az anyaghiba által keltett térperturbációt létrehozni. Az ECT mérések célja tehát ezen, a V_d térfogatban nullától eltérő,

$$\vec{P}(\vec{r}) = [\sigma(\vec{r}) - \sigma_0]\vec{E}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

ún. *anyaghibát leíró áramdipólus-sűrűség* által keltett elektromágneses tér meghatározása. (2.2)-(2.4) egyenletekből, \vec{H} kiküszöbölésével a következő egyenletre jutunk:

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}) - k_c^2\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\vec{P}(\vec{r}), \quad (2.5)$$

ahol,

$$k_c^2 = -j\omega\mu_0\sigma_0. \quad (2.6)$$

Bontsuk fel az elektromágneses teret két komponensre, legyen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + \vec{E}^f(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}^i(\vec{r}) + \vec{H}^f(\vec{r}), \quad (2.7)$$

ahol az i felső index az ún. *beiktatott teret* (angolul: incident field) jelöli, amely az ECT vizsgálófej anyaghiba nélküli munkadarabban keltett elektromágneses teret jelenti. Ez úgy kapható meg, hogy tekintjük az anyaghiba nélküli munkadarabot ($\sigma(\vec{r}) = \sigma_0$, $\vec{r} \in V_s$) és a vizsgálófej áramát, mint a teret gerjesztő mennyiséget. Az f felső index pedig az ún. *anyaghiba terét* (angolul: flaw field) jelöli, amely az anyaghiba jelenléte következtében létrejövő perturbáló tér. Ezt az elektromágneses teret úgy kapjuk, hogy tekintjük $\vec{P}(\vec{r})$ áramdipólus-sűrűség, mint gerjesztés hatására létrejött teret az anyaghiba nélküli munkadarab figyelembevételével. (Az anyaghiba tér meghatározásánál legtöbbször a vizsgálófej jelenlététől eltekintünk, ezen egyszerűsítéssel általában igen kis hibát követünk el.)

Mivel a beiktatott teret gerjesztő áram a V_s térfogaton kívül helyezkedik el, ezért \vec{E}^i a következő egyenletet elégíti ki V_s -ben:

$$\text{rot rot } \vec{E}^i(\vec{r}) - k_c^2 \vec{E}^i(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in V_s. \quad (2.8)$$

A \vec{P} anyaghibát leíró áramdipólus-sűrűség, mint forrás által keltett anyaghiba tér pedig megoldása a

$$\text{rot rot } \vec{E}^f(\vec{r}) - k_c^2 \vec{E}^f(\vec{r}) = -j\omega\mu_0 \vec{P}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V_s \quad (2.9)$$

egyenletnek. Látható, hogy (2.8) és (2.9) összege valóban megadja a (2.5) egyenletet.

Az ECT fej által az anyaghiba nélküli munkadarabban gerjesztett beiktatott tér ($\vec{E}^i(\vec{r})$) számítására különböző módszerek ismertek az irodalomból (lásd pl.: [6]), ennek részleteivel itt nem foglalkozunk. Ismert \vec{P} esetében az anyaghiba tere előállítható diadikus Green-függvények [7] segítségével a következő módon:

$$\vec{E}^f(\vec{r}) = j\omega\mu_0 \iiint_{V_a} \mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (2.10)$$

ahol $\mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}')$ az elektromos térre vonatkozó diadikus Green-függvény. Ez az \vec{r}' helyen található koncentrált gerjesztést transzformálja az \vec{r} pontbeli elektromos térbe, amennyiben $\vec{r}, \vec{r}' \in V_s$.

A diadikus Green-függvény megoldása a következő diadikus egyenletnek:

$$\text{rot rot } \mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') - k_c^2 \mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\mathbf{I}, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in V_s, \quad (2.11)$$

ahol δ a Dirac-függvényt, \mathbf{I} az egységtenzort jelenti és a \mathbf{G}^e komponensei (\mathbf{G}^e -nek az adott koordináta-rendszer egységvektoraival vett skaláris szorzása után kapott vektorok) kielégítik az adott elrendezésben az elektromos térre megfogalmazható folytonossági- és peremfeltételeket.

Megjegyezzük, hogy a diadikus Green-függvény megadása csak egyszerű (kanonikus) geometriájú munkadarabok (pl.: féltér, lemez, rétegezett lemez, henger, cső, többrétegű cső, stb. alakú munkadarabok) esetében tehető meg viszonylag könnyen. Ezen esetek gyakorlati jelentősége azonban igen nagy, mivel az iparban előforduló ECT problémák

jelentős hányadában közelíthető a munkadarab egyszerű geometriájú elrendezéssel. A közelítés leginkább azért tehető meg, mert az ECT mérőfej és az anyaghiba általában kicsi, ezért az eredmény szempontjából érdekes térrész az anyaghiba közvetlen környezete koncentrálódik, így a térrészben kialakuló elektromágneses tér kevésbé különbözik az egyszerűsített geometriájú elrendezésben kialakuló tértől.

Az elektromos térre vonatkozó diadikus Green-függvény meghatározásán túl, (2.10) kiértékelésének egy másik nehézsége, hogy a $\mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}')$ diádban lévő függvények szingulárisok az $\vec{r} = \vec{r}'$ helyen, így a számítások során feltétlenül figyelemmel kell arra lenni, hogy az integrál kiértékelésére megfelelő, numerikusan stabilis algoritmust használjunk. Egy ilyen algoritmus megtalálása és implementálása a számítások egyik kulcskérdése.

(2.10) segítségével felírhatjuk a (2.7) teljes elektromos teret a következő formában:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + j\omega\mu_0 \iiint_{V_d} \mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (2.12)$$

Bevezetjük a

$$v(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r}) - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (2.13)$$

ún. *relatív anyaghiba függvényt*, amelynek értéke nulla az anyaghibán kívül ($v(\vec{r}) = 0$, $\vec{r} \notin V_d$) és a V_d térfogatban nem nulla értéket vesz fel. Például nem vezető anyaghibák esetében $v(\vec{r}) = -1$, $\vec{r} \in V_d$ adódik. A (2.12) egyenletet beszorozva $\sigma(\vec{r}) - \sigma_0$ függvénnyel, valamint felhasználva (2.4) és (2.13) képleteket a térfogati anyaghibát leíró (a $\vec{P}(\vec{r})$ áramdipólus-sűrűsége vonatkozó másodfajú Fredholm típusú) integrálegyenlet szokásos formájához jutunk [3]:

$$\vec{P}^i(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) + k_c^2 v(\vec{r}) \iiint_{V_d} \mathbf{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad \vec{r} \in V_d, \quad (2.14)$$

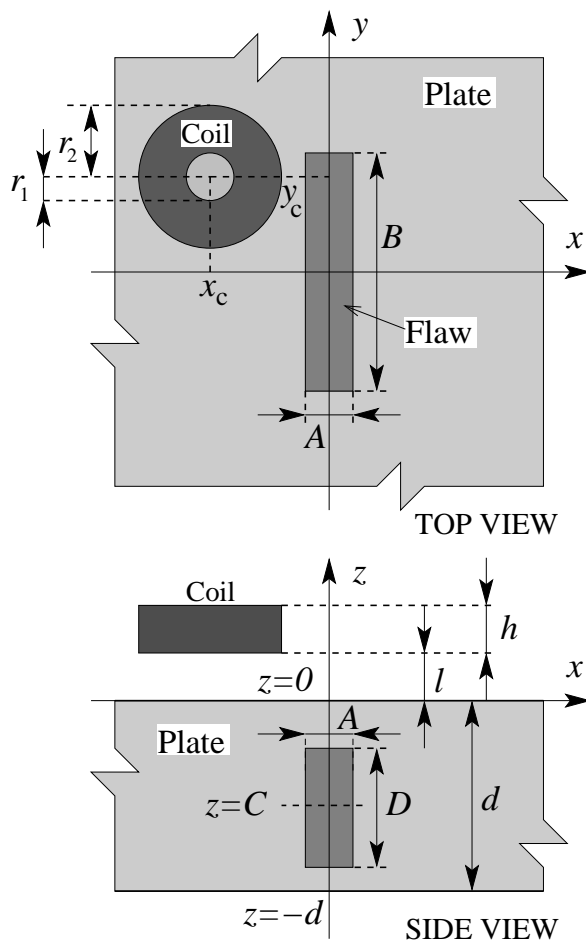
ahol \vec{P}^i kifejezhető \vec{E}^i ismeretében:

$$\vec{P}^i(\vec{r}) = [\sigma(\vec{r}) - \sigma_0] \vec{E}^i(\vec{r}). \quad (2.15)$$

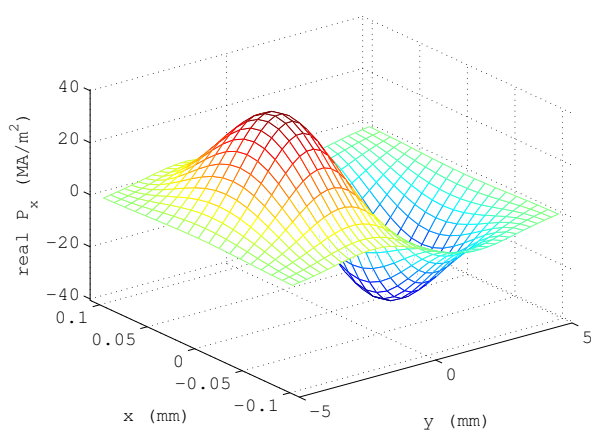
Látható, hogy (2.14) bal oldala és a jobb oldal mindkét tagja azonosan nulla az anyaghiba térfogatán kívül, így ezen integrálegyenletet csak a V_d térfogatban kell megoldani. A megoldás célja a \vec{P} ismeretlen meghatározása, aminek segítségével már számítható az adott ECT vizsgálófej jele (lásd a 2.2. pontot).

A (2.14) integrálegyenletben a mag szinguláris. Ezen szingularitás kezelése a Cauchy-féle főérték segítségével megoldható. Annak ellenére, hogy a probléma elméletileg jól körülhatárolt, az integrálegyenlet numerikus megoldásakor ezen szingularitás komoly odafigyelést igényel, így csak speciális erőfeszítések árán adható numerikusan is stabilis megoldása a (2.14) egyenletnek. Egy lehetséges megoldásra található példa a [8, 9] irodalmakban.

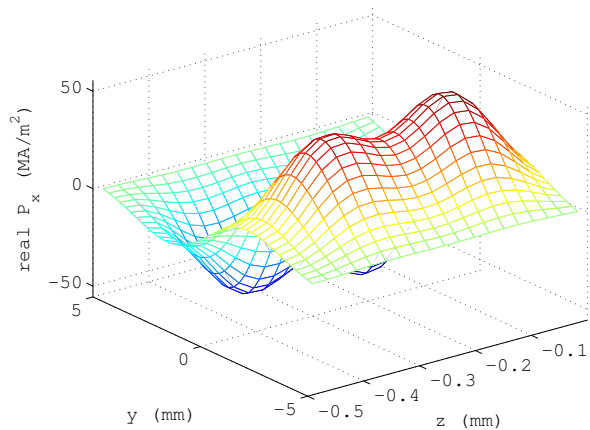
Egy gyakorlati példaként tekintsük azt az esetet, amikor egy vezető lemezben elhelyezkedő anyaghiba jelét akarjuk kiszámítani. A vizsgált konfiguráció a 2.2. ábrán látható. A leírtak alapján a (2.14) integrálegyenlet megoldásaként kaphatjuk meg az anyaghiba térfogatában értelmezett \vec{P} függvényt. A 2.3. ábrán két síkban kirajzoltuk a \vec{P} függvény x -irányú komponensének valós részét (azaz a $t = 0$ időpillanatban vett értékét) abban az esetben, amikor a gerjesztő tekercs pontosan az anyaghiba középpontja felett található.



2.2. ábra. ECT vizsgálófej egy hasáb alakú térfogati anyaghibát tartalmazó lemez felett



(a) $\text{Re} \{ \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_x \}$ a $z = C$ síkban



(b) $\text{Re} \{ \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_x \}$ az $x = 0$ síkban

2.3. ábra. A (2.14) integrálegyenlet megoldásaként kapott \vec{P} vektor x -irányú komponense az anyaghiba két síkjában a [9] irodalom alapján

2.2. A térfogati anyaghiba örvényáramú válaszelének számítása

A (2.14) megoldásaként kapott \vec{P} anyaghibát leíró áramdipólus-sűrűség ismeretében meg tudjuk határozni a vizsgálófej jelét. Alapvetően két jel meghatározása képzelhető el. Az első esetben a munkadarabon kívül elhelyezkedő, mágneses teret mérő szenzor jelét, illetve ennek az anyaghiba hatására létrejövő megváltozását kell kiszámítani. A másik lehetséges eset az, amikor egy adott vizsgálótekericsben indukált feszültségnek az anyaghiba jelenlétéből adódó megváltozását kell kiszámítani. A második esetben az indukált feszültségváltozást a teret gerjesztő áramra szokás normálni, így gyakran impedancia-változás meghatározásáról beszélünk. A gyakorlatban előforduló vizsgálófejek jelének számítása egyszerűen visszavezethető ezen két alapesetre. Megjegyezzük, hogy a térmérő szenzor jele – azaz a mágneses tér értékének meghatározása egy, vagy esetleg néhány pontban – szintén visszavezethető egy vizsgálótekericsben indukált feszültség meghatározására, erről a lehetőségről még szó lesz.

2.2.1. A mágneses tér változásának számítása

Az ECT fejben lévő mágneses tér szenzorok az anyaghiba következtében létrejövő térváltozást mérik. Ez az a térváltozás, amelyet az anyaghibát leíró \vec{P} áramdipólus-sűrűség, mint gerjesztés hoz létre abban a térrészben, ahol a szenzor található. Ennek számítása egyszerűen megtehető, amennyiben ismerjük azt a diadikus Green-függvényt, \mathbf{G}_{sa}^m , amely a vizsgált munkadarabban található gerjesztést transzformálja a munkadarabon kívüli (általában a gerjesztéshez közeli) vizsgálati pontban lévő mágneses térbe [7]. E Green-függvény jelölése a szokásoknak megfelelően úgy történik, hogy a felső index a számított elektromágneses térjellemzőre vonatkozik (esetünkben: m , azaz mágneses térerősség), az alsó index betűi pedig rendre a gerjesztés és a vizsgálati pont helyét jelölik (s : munkadarab, a : a munkadarabon kívüli levegő). Jelölje $\Delta\vec{B}$ az anyaghiba jelenléte okozta mágneses indukcióvektor változását, ez – összhangban (2.7) egyenlettel – a $\Delta\vec{B} = \vec{B}^f = \vec{B} - \vec{B}^i$ egyenlettel adható meg, ahol \vec{B} a kialakult mágneses tér indukcióvektorát, \vec{B}^i az anyaghiba figyelembevétele nélkül kapott indukciót, \vec{B}^f pedig az anyaghiba hatására létrejött (azaz a \vec{P} által gerjesztett) mágneses indukcióváltozást jelenti. A fentiek alapján $\Delta\vec{B}$ a következő alakban felírható:

$$\Delta\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \iiint_{V_a} \mathbf{G}_{sa}^m(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \text{rot } \vec{P}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad \vec{r} \in V_a, \quad (2.16)$$

ahol V_a a munkadarabot körülvevő levegőt, azaz azt a térrészt jelöli, ahol a mágneses tér változását kívánjuk meghatározni. Mivel \vec{r} és \vec{r}' különböző térrészben helyezkednek el, a Green-függvények nem szingulárisak, így (2.16) numerikus kiértékelése ismert \vec{P} esetében egyszerű feladatnak tekinthető.

Vegyük észre, hogy a (2.16) kifejezésben a gerjesztés a \vec{P} rotációja, ennek az oka az, hogy a (2.1, 2.2) egyenletek (2.7) felbontás szerint bevezetett \vec{H}^f -re rendezett alakja a V_s térfogatban a következő:

$$\text{rot rot } \vec{H}^f(\vec{r}) - k_c^2 \vec{H}^f(\vec{r}) = \text{rot } \vec{P}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V_s. \quad (2.17)$$

A (2.16) kifejezésben szereplő \mathbf{G}_{sa}^m diadikus Green-függvény a következő diadikus egyenletek megoldásaként kapható meg:

$$\text{rot rot } \mathbf{G}_{sa}^m(\vec{r}|\vec{r}') - k_0^2 \mathbf{G}_{sa}^m(\vec{r}|\vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in V_a, \vec{r}' \in V_s, \quad (2.18)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{G}_{ss}^m(\vec{r}|\vec{r}') - k_c^2 \mathbf{G}_{ss}^m(\vec{r}|\vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\mathbf{I}, \quad \vec{r}, \vec{r}' \in V_s, \quad (2.19)$$

ahol $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, valamint a V_s térfogat V_a -val határos felületén a \mathbf{G}_{sa}^m és \mathbf{G}_{ss}^m komponenseinek eleget kell tenniük a mágneses térre megfogalmazható folytonossági feltételeknek.

Megjegyezzük, hogy a (2.14) egyenletben található \mathbf{G}^e Green-függvényt a most bevezetett jelölésekkel \mathbf{G}_{ss}^e formában kellene írni, illetve ennek meghatározására használható egyenletek a (2.11) helyett a (2.18,2.19) egyenletek lennének azzal a különbséggel, hogy az m felső indexeket e -re kellene cserélni. Ez a betűcsere azt jelenti, hogy a Green-függvények komponenseire az elektromos térre vonatkozó folytonossági- és peremfeltételeket kell kielégíteni. Az integrálegyenlet felírásakor az egyszerűbb megértés kedvéért tekintettünk el az elmondottak részletezésétől és ezért használtuk a \mathbf{G}^e jelölést és a (2.11) egyenletet.

2.2.2. Az impedancia-változás számítása

Tekintsük azt az esetet, amikor az ECT vizsgálófej egy adó és egy vevő tekercsből áll és a vizsgálófej egy adott pozícióban található a munkadarab környezetében. Az adó tekercs árama legyen I_a komplex csúcsértékű szinuszos áram, és azt kívánjuk mérni, hogy a vevő tekercsben indukált feszültség mennyiben változik a munkadarab V_d tartományában található anyaghiba hatására. $\vec{E}^i(\vec{r})$ az adó tekercs I_a árama által a hibamentes munkadarabba indukált elektromos tér, azaz a beiktatott tér. Feltételezve, hogy a vevő tekercs árama egy I_a frekvenciájával azonos frekvenciájú I_v fiktív áram, hasonló módon kiszámítható a $\vec{E}^{vi}(\vec{r})$ fiktív elektromos tér, ami a vevő tekercs által a hibamentes munkadarabba indukált elektromos teret jelenti. Jelölje továbbá ΔU_v a vevő tekercsbe indukált feszültség megváltozását, amely a V_d térfogatban található anyaghiba hatására jön létre ($\Delta U_v = U_v - U_v^i$, ahol U_v a gerjesztetlen (azaz nulla áramú) vevő tekercsben indukált feszültséget, U_v^i pedig a gerjesztetlen vevő tekercsben, hibamentes munkadarab feltételezése esetében indukált feszültséget jelenti).

A vevő tekercsben indukált feszültség megváltozása \vec{E}^i és \vec{E}^{vi} , valamint a (2.14) integrálegyenlet megoldásaként kapott \vec{P} anyaghibát leíró áramdipólus-sűrűség ismeretében a reciprocitás [10] felhasználásával a következő módon adható meg:

$$\Delta U_v = -\frac{1}{I_v} \iiint_{V_d} \vec{E}^{vi}(\vec{r}) \cdot \vec{P}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.20)$$

Gyakran előfordul az az eset, amikor egy ECT fejben ugyanazon tekercs tölti be az adó és a vevő szerepét is, és az ECT válaszjelnek ezen tekercs impedanciájának megváltozása (ΔZ) tekinthető. Ilyenkor – felhasználva, hogy $I_a \Delta Z = \Delta U_a$ (ΔU_a az adó tekercsben indukált feszültségnek az anyaghiba jelenléte következtében létrejött megváltozása) – (2.20) és $\Delta U_a = \Delta U_v$ alapján, az ECT fej válaszjele az irodalomból is ismert formában adódik [3]:

$$\Delta Z = -\frac{1}{I^2} \iiint_{V_d} \vec{E}^i(\vec{r}) \cdot \vec{P}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.21)$$

ahol $I = I_a = I_v$ a tekercs árama.

Adó- és vevő tekercsekből álló vizsgálófejek esetében az anyaghiba jelét a következő impedancia jellegű mennyiségként is szokták megadni:

$$\Delta Z = \frac{\Delta U_v}{I_a} = -\frac{1}{I_a I_v} \iiint_{V_d} \vec{E}^{vi}(\vec{r}) \cdot \vec{P}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.22)$$

A (2.20) könnyen általánosítható azokra az esetekre, amikor több adó- és/vagy több vevő tekercs található az ECT fejben, illetve egyszerűen kezelhető az olyan konfiguráció is, amelyben bizonyos vevő tekercsek differenciális módba vannak összekapcsolva.

Az ECT fej vevő tekercsére indukált feszültség megváltozását annak definíciója alapján úgy számolnánk, hogy a \vec{P} által generált elektromos térerősséget integrálnánk a tekercs menetei mentén. Ezen eljárásnál egy sokkal egyszerűbb és numerikusan stabilisabb megoldást kínálnak a (2.20) és (2.21) képletek, mivel az integrál kiértékeléséhez szükséges adatok gyakorlatilag már a (2.14) integrálegyenlet megoldásakor rendelkezésre állnak. Ez feltétlenül így van egytekercses ECT fejek esetében (2.21), illetve az adóból és vevőből álló ECT fejek esetén csak ugyanazon eljárás ismételt alkalmazása szükséges a vevő tekercsre, amelyet már az integrálegyenlet megoldása előtt alkalmaztunk az adóra (azaz ki kell számítani a fiktív I_v áram esetében a vevő tekercs által indukált \vec{E}^{vi} beiktatott teret is). Nincs szükség viszont új Green-függvények használatára, mint ahogyan az a definíció alapján történő számításokhoz szükséges lett volna. A (2.20) és (2.21) képletek még arra is rámutatnak, hogy annak érdekében, hogy az ECT jelet pontosan ki tudjuk számítani, a \vec{P} függvény integrális értelemben kell pontosan meghatározni.

2.2.3. A mágneses tér értékeinek meghatározása az impedancia-változás képletével

Tekintsünk egy kicsiny hurkot, amely közelítőleg egy síkban elhelyezkedő, azonos sugarú, N számú menetből áll. Helyezzük el ezt a hurkot úgy, hogy annak középpontja abban a pontban legyen, ahol a mágneses tér anyaghiba következtében létrejövő megváltozását kívánjuk mérni, pontosabban a mágneses tér azon komponensének megváltozását, amely a hurok síkjának normálisa irányba esik. A mérőhurok A keresztmetszete legyen annyira kicsi, hogy feltételezhessük, hogy a mágneses tér jó közelítéssel ugyanaz az A felület minden pontjában.

Az ECT fejben lévő gerjesztő tekercset és a leírt mérőhurkot tekintsük egy adóból és vevőből álló ECT fej tekercseinek. Ezek alapján a mérőhurokban (vevő tekercsben) indukált feszültség megváltozását számíthatjuk a (2.20) képlet alapján. (I_v és a hurok síkjának normálisa a jobbcavar szabály szerint vannak összerendelve.) Ugyanez a feszültségváltozás felírható a mágneses indukció hurok síkjának normálisa irányába mutató komponensének, az anyaghiba jelenlétéből adódó megváltozásából (ΔB_n) is az indukciótörvény segítségével. Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$\Delta U_v = -j\omega AN \Delta B_n, \quad (2.23)$$

ahol ΔU_v a (2.20) alapján kapott eredmény. (2.23) egyenletből pedig egyszerűen kifejezhető a keresett mágneses indukció megváltozása:

$$\Delta B_n = -\frac{\Delta U_v}{j\omega AN}. \quad (2.24)$$

A mágneses indukció megváltozás ezen képlet alapján történő számításának az előnye ugyanaz, mint amit az impedancia-változás számításánál az imént leírtunk, tehát az, hogy nincs szükség új Green-függvények meghatározására, mint ahogyan arra szükség volt a (2.16) képlet alapján történő számítás esetében. A gyakorlatban elsősorban az adott számítási környezet határozza meg, hogy az impedancia-változásból való számítás (ebben az esetben a mérőhurok beiktatott terét kell kiszámítani) vagy a közvetlen mágneses tér számítása (ebben az esetben szükség van a megfelelő Green-függvényekre) a célravezetőbb.

3. fejezet

Síkhullámok

Síkhullámnak nevezzük a Maxwell-egyenletek végtelen kiterjedésű, homogén dielektrikummal kitöltött, forrásmentes térben értelmezett bizonyos típusú megoldásait. E megoldások számos gyakorlati felhasználással rendelkeznek, ezért részletes vizsgálatra érdemesek. Ezekre a síkhullámnak nevezett megoldásokra jellemző, hogy az elektromos és a mágneses térjellemzők értékei egy kitüntetett síkban a helytől függetlenek. Mivel végtelen kiterjedésű tartományt vizsgálunk, a térjellemzők helyfüggetlensége minden, a kitüntetett síkkal párhuzamos síkban ugyancsak fennáll. A síkhullám ún. terjedési iránya merőleges a kitüntetett síkra.

A mérnöki gyakorlatban sokszor adódik olyan feladat, amikor egy síkhullámmal megvilágított tárgy által szórt elektromágneses (EM) teret kell meghatároznunk. Tipikusan ez a feladat, amikor egy nagy távolságban (nagyobb, mint 5 – 10 hullámhossznyi távolságban) lévő antenna által keltett teret szeretnénk meghatározni egy tárgy valamely környezetében. Amennyiben a tárgy méretei a hullámhosszhoz képest sokkal nagyobbak, ennek felületének egyes tartományait a hullámhossznál lényegesen nagyobb méretekkel jellemzett síkokkal lehet közelíteni és e síkokról történő reflexiót érdemes vizsgálni. Az itt felmerülő alapfeladat tehát a megvilágító síkhullám viselkedésének vizsgálata síkkal elválasztott két különböző anyagjellemzőjű féltér határán. Fontos megemlíteni, hogy az anyagokat elválasztó sík általában nem párhuzamos a síkhullám terjedésére merőleges kitüntetett síkkal, így általános esetben az ún. ferdén beeső síkhullám viselkedését kell tekintenünk.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a Maxwell-egyenletek mely megoldásait nevezzük síkhullámoknak és azt is belátjuk, hogy egy adott síkhullámot hogyan lehet egy tetszőleges síkra vonatkoztatva felbontani két nevezetes polarizációjú (a későbbiekben transzverzális elektromos (TE) és transzverzális mágneses (TM) típusúnak nevezett) síkhullám összegére. Ezt követően megvizsgáljuk a TE és TM síkhullámok viselkedését két – különböző anyagjellemzőkkel bíró – féltér határán. Végezetül, a leírt elméletet kiterjesztjük homogén anyagjellemzőkkel rendelkező térben terjedő tetszőleges EM hullám viselkedésének vizsgálatára azáltal, hogy megmutatjuk, hogy miként lehet tetszőleges hullámot felírni síkhullámok szuperpozíciójaként.

3.1. TE és TM polarizációjú síkhullámok

Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű, homogén, lineáris és izotrop dielektrikummal kitöltött forrásmentes tartományt. Feltételezzük továbbá, hogy az EM tér időben ω kör-

frekvenciával szinuszosan változik és állandósult állapotban van, következésképpen a tér leírásához a térjellelmezők komplex csúcsértékeit használjuk. Az adott feltételek mellett az első és második Maxwell-egyenlet a következő alakot ölti:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}. \quad (3.2)$$

Megjegyezzük, hogy a harmadik és negyedik Maxwell-egyenlet a fenti feltételek mellett redundáns, mivel azok megkaphatók a (3.1) és (3.2) divergenciájaként.

Keressük a Descartes-koordinátákban az EM tér azon megoldásait, amelyek z szerinti változása $e^{-jk_z z}$ alakú. Ekkor a (3.1) és (3.2) egyenleteket a térjellelmezők rendezőire kifejezve a következőt kapjuk:

$$E_x = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} + jk_z H_y \right], \quad (3.3)$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - jk_z H_x \right], \quad (3.4)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right]. \quad (3.5)$$

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + jk_z E_y \right], \quad (3.6)$$

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial x} - jk_z E_x \right], \quad (3.7)$$

$$H_z = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right], \quad (3.8)$$

A (3.3), (3.4), (3.6) és (3.7) egyenletek átrendezhetőek úgy, hogy a jobb oldal csak H_z -től és E_z -től függjön (pl. (3.9) megkapható úgy, hogy (3.3) egyenletbe H_y helyére behelyettesítjük a (3.7) egyenlet jobb oldalát, majd az eredményt rendezzük E_x -re):

$$E_x = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left[-j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right], \quad (3.9)$$

$$E_y = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left[j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]. \quad (3.10)$$

$$H_x = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left[-jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right], \quad (3.11)$$

$$H_y = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2} \left[-jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right], \quad (3.12)$$

A fenti egyenletekből látható tehát, hogy a feltételeknek megfelelő EM hullámot megkaphatjuk két skaláris függvény: E_z és H_z ismeretében. Kézenfekvő szétválasztani a teljes EM teret úgy, hogy az egyik esetben $E_z = 0$ választással, a másik esetben pedig $H_z = 0$ választással élünk. Mivel az $E_z = 0$ választás esetében az elektromos térnek nincs z irányú komponense, ezért ezt, a $H_z \neq 0$ skalár függvény által leírt EM teret *transzverzális elektromos polarizációjú* (TE) hullámnak nevezzük. Hasonlóan, amikor a $H_z = 0$ megkövetéssel élünk, az ún. *transzverzális mágneses polarizációjú* (TM) hullámhoz jutunk. E_z és

H_z függvényének a következőkben bemutatásra kerülő megválasztása esetében síkhullám megoldásra jutunk, ezért fogjuk ezeket TE és TM polarizációjú síkhullámoknak nevezni.

Fontos megjegyezni, hogy a TE és TM felbontások mindig egy előre adott síkra vonatkoztatva értelmezhetők. A mi esetünkben ez a z koordináta irányra merőleges sík (xy sík). Ezért pontosabb, ha azt mondjuk, hogy egy *síkhullám z irányra merőleges síkra vonatkoztatott TE és TM polarizációjú felbontását* adjuk meg.

Vegyük a (3.2) egyenlet rotációját és helyettesítsük ebbe a (3.1) egyenletet. Eredményként a \vec{H} kiküszöbölésével, a $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$, valamint a $\text{div } \vec{E} = 0$ felhasználásával az \vec{E} -re vonatkozó hullámegyenletet kapjuk:

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0. \quad (3.13)$$

A Descartes-koordináta rendszerben felírva ezt az egyenletet, valamint felhasználva az előzőekben feltételezett $e^{-jk_z z}$ alakú z -szerinti helyfüggést az \vec{E} z irányú rendezőjére a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_z^2 E_z + \omega^2 \mu \varepsilon E_z = 0. \quad (3.14)$$

Hasonló módon kaphatjuk a H_z -re vonatkozó egyenletet is, ennek alakja a következő:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - k_z^2 H_z + \omega^2 \mu \varepsilon H_z = 0. \quad (3.15)$$

Keressük (3.14) megoldásaként E_z -t szorzatszeperációval, tehát legyen

$$E_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-jk_z z}. \quad (3.16)$$

Helyettesítsük ezt a megoldást a (3.14) egyenletbe, majd osszuk le a kapott egyenletet E_z -vel. Eredményként a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + (-k_z^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) = 0. \quad (3.17)$$

(3.17) első tagja csak x -től, második tagja csak y -től függ, harmadik tagja pedig x -től és y -től is független. Egy ilyen egyenlet csak akkor teljesülhet tetszőleges x -re és y -ra, ha az első és második tag is x -től és y -től is független (konstans) értéket vesz fel. Igaznak kell lennie tehát a következő két egyenletnek:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad (3.18)$$

ahol k_x és k_y tetszőleges állandók. A fenti közönséges differenciálegyenletek általános megoldásai:

$$X(x) = X^+ e^{-jk_x x} + X^- e^{jk_x x}, \quad (3.19)$$

$$Y(y) = Y^+ e^{-jk_y y} + Y^- e^{jk_y y}, \quad (3.20)$$

ahol X^+ , X^- , Y^+ és Y^- tetszőleges konstans értékek. (3.18) egyenletet (3.17) egyenletbe helyettesítve az ún. diszperziós egyenletre jutunk:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon. \quad (3.21)$$

Összegzésként megállapíthatjuk, hogy az elektromos tér z irányú rendezője a következő alakú elemi megoldások szuperpozíciójaként írható fel:

$$E_z(x, y, z) = E_{z0} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} = E_{z0} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (3.22)$$

ahol az E_{z0} tetszőleges komplex konstans és a k_x, k_y, k_z értékeinek eleget kell tenniük a (3.21) egyenletnek. Vegyük észre, hogy ha egy $k_x/y/z$ érték kielégíti (3.21) egyenletet, akkor annak ellentettje is kielégíti azt, azaz ha pl. $k_x = k_{x0}$ -ra igaz (3.21), akkor ez igaz lesz a $k_x = -k_{x0}$ értékre is. Következésképpen a (3.21) egyenletnek 8 megoldása van (8 különböző számhármasa a k_x, k_y és k_z értékeknek), amelyekre igaz az, hogy k_x, k_y és k_z abszolút értékei ugyanazok. A (3.22) egyenlettel adott elemi megoldás tehát az xy síkra vonatkoztatott TM polarizációjú síkhullám elektromos terének z -irányú rendezőjét adja.

A konkrét összetartozó k_x, k_y, k_z számhármast úgy lehet pl. meghatározni, hogy k_x és k_y értékeit tetszőlegesen megválasztjuk, majd ezek ismeretében k_z értékére az egyik megoldás a következőre adódik (a másik megoldás ennek az ellentettje lesz):

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2}, & k_x^2 + k_y^2 \leq \omega^2 \mu \varepsilon, \\ -j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \mu \varepsilon}, & k_x^2 + k_y^2 \geq \omega^2 \mu \varepsilon. \end{cases} \quad (3.23)$$

Látható, hogy k_z tisztán képzetes értéket is felvehet, ez a z -irányba exponenciálisan csökkenő amplitúdójú síkhullámot ír le.

A síkhullámok leírásakor célszerű bevezetni az ún. hullámvektort a következő definícióval:

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z. \quad (3.24)$$

Fontos észrevenni, hogy $|\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{c}$ (c az adott anyagban terjedő fény sebességét jelöli) egy kizárólag csak az anyagi minőségtől és a gerjesztés frekvenciájától függő állandó. A $|\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ megkötés valójában maga a (3.21) egyenlet. A hullámvektorral a (3.22) kifejezés a következő tömörebb alakban írható:

$$E_z(\vec{r}) = E_{z0} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.25)$$

ahol \vec{r} a helyvektort jelöli, ami Descartes-koordinátákban: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. A \vec{k} hullámvektor a síkhullám terjedési irányát jelöli, látni fogjuk ugyanis, hogy \vec{k} iránya merőleges azokra a síkokra, amelyek mentén az elektromos és mágneses térerősség értékei állandók.

A (3.15) egyenletből kiindulva teljesen analóg módon kapható meg H_z kifejezése is:

$$H_z(\vec{r}) = H_{z0} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (3.26)$$

Behelyettesítve az azonos \vec{k} hullámvektorokhoz tartozó (3.25)-(3.26) kifejezéseket a (3.9)-(3.12) egyenletekbe, megkapjuk az adott hullámvektorhoz tartozó síkhullám elektromos

és mágneses térerősségeinek rendezőit:

$$E_x(\vec{r}) = \left(-\frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} - \frac{\omega \mu k_y}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.27)$$

$$E_y(\vec{r}) = \left(-\frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} + \frac{\omega \mu k_x}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.28)$$

$$E_z(\vec{r}) = E_{z0} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.29)$$

$$H_x(\vec{r}) = \left(\frac{\omega \varepsilon k_y}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} - \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.30)$$

$$H_y(\vec{r}) = \left(-\frac{\omega \varepsilon k_x}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} - \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.31)$$

$$H_z(\vec{r}) = H_{z0} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (3.32)$$

A fenti kifejezésekben könnyen szeparálható a TE és TM polarizációjú rész, hiszen a TE komponenshez jutunk az $E_{z0} = 0$ választással, amíg a $H_{z0} = 0$ választás a síkhullám TM komponensét írja le.

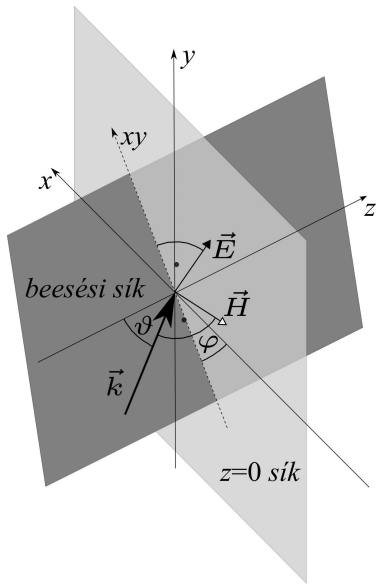
A 3.1. és 3.2. ábrákon a TE és TM polarizációjú síkhullámokat jellemző vektorok és az ún. beesési sík látható. Mindkét polarizációjú síkhullámra igazak a következők: (i) a beesési sík a \vec{k} vektor és a $z = 0$ sík normálisa (azaz az \vec{e}_z) által meghatározott sík, ezt a beesési síkot az \vec{e}_z és az $\vec{e}_{xy} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \vec{e}_x + \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \vec{e}_y$ egymásra merőleges egységvektorok feszítik ki, (ii) a beesési sík és a $z = 0$ sík egymásra merőleges, (iii) az \vec{E} , \vec{H} és \vec{k} egymásra merőlegesek és jobbsodrású rendszert alkotnak ($\frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \times \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$) és (iv) az α beesési szög a \vec{k} és \vec{e}_z vektorok által bezárt szög. A TE polarizációjú síkhullám esetében a \vec{H} vektor a beesési síkban, az \vec{E} vektor a $z = 0$ síkban fekszik, amíg a TM polarizációra igaz az, hogy az \vec{E} vektor a beesési síkban, a \vec{H} vektor pedig a $z = 0$ síkban fekszik.

A Maxwell-egyenletek síkhullám típusú megoldását – azaz síkhullámot – tehát úgy kaphatunk, hogy választunk egy \vec{k} hullámvektort, amelyre igaz, hogy $|\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ és értéket adunk az E_{z0} és a H_{z0} komplex számoknak, ezek ismeretében ugyanis a (3.27)-(3.32) képletek megadják a síkhullám elektromos és mágneses térerősségét a tér minden pontjában.

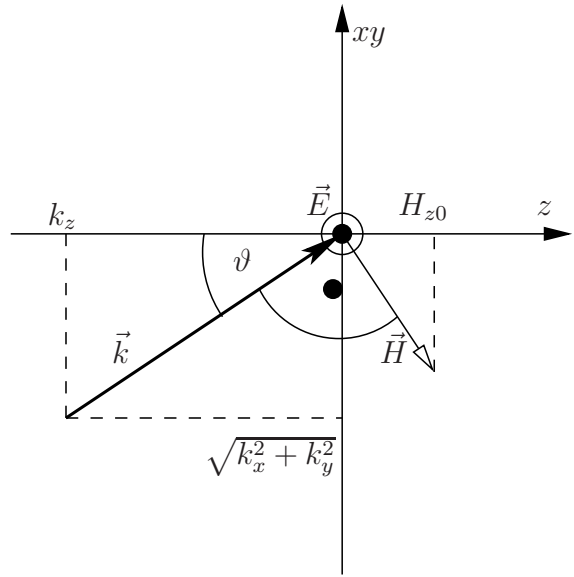
Vegyük észre, hogy a (3.27)-(3.32) kifejezések a $k_x = k_y = 0$ esetében nem értelmezhetők. Ez valójában egy z irányba terjedő síkhullámot jelent, amely esetében ismeretes, hogy az elektromos és a mágneses térnek is zérus a z irányú rendezője. Az ilyen síkhullámot TEM (transzverzális elektromos és mágneses) síkhullámnak szokták nevezni. Megállapíthatjuk tehát, hogy TE és TM felbontásról akkor lehet csak beszélni, ha az a sík, amelyre vonatkozóan a síkhullámot felbontani kívánjuk nem merőleges a terjedés irányára, ilyenkor *ferdén terjedő síkhullám*ról beszélünk.

A fentiek alapján külön kell kezelnünk az $z = 0$ síkra vonatkoztatott TEM polarizációjú, azaz a $z = 0$ síkra merőlegesen terjedő síkhullám esetét. Ekkor $\vec{k} = k_z \vec{e}_z = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \vec{e}_z$, amelyből következik, hogy $k_x = k_y = 0$, azaz, hogy $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Használjuk az $E_{x0} = E_x(x = 0, y = 0, z = 0)$ és $E_{y0} = E_y(x = 0, y = 0, z = 0)$ komplex konstansokat a EM tér leírására¹ és helyettesítsük ezeket a (3.3)-(3.8) egyenletekbe. Eredményként

¹Hasonlóan használhatnánk bármely kettőt az EM tér következő négy rendezője közül: E_x , E_y , H_x , H_y .

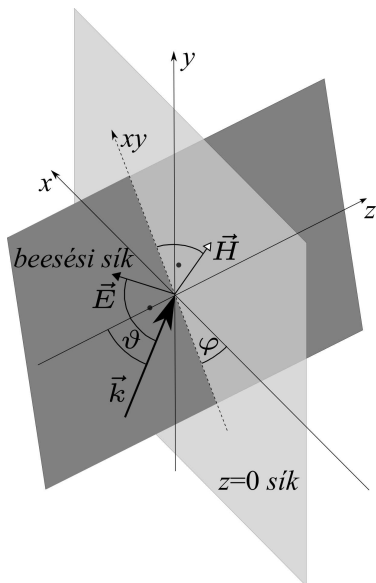


(a) A vektorok 3D megjelenítése valamint a beesési és a rá merőleges $z = 0$ síkok

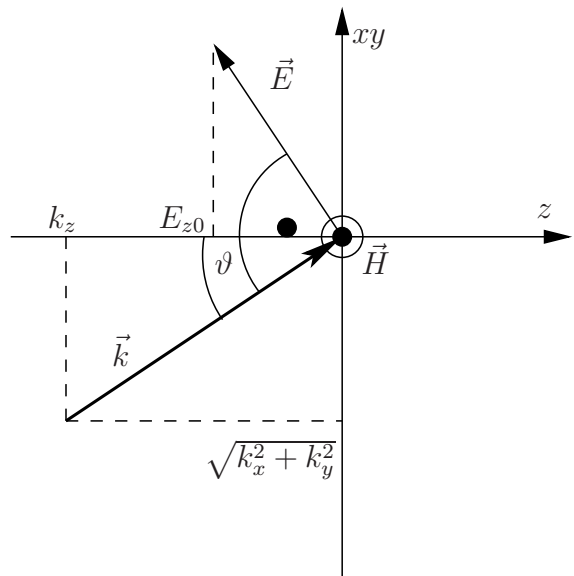


(b) A vektorok 2D megjelenítése a beesési síkban

3.1. ábra. Ferdén beeső, a $z = 0$ síkra vonatkoztatott TE polarizációjú síkhullám. A \vec{H} vektor a beesési síkban, az \vec{E} vektor a $z = 0$ síkban fekszik.



(a) A vektorok 3D megjelenítése valamint a beesési és a rá merőleges $z = 0$ síkok



(b) A vektorok 2D megjelenítése a beesési síkban

3.2. ábra. Ferdén beeső, a $z = 0$ síkra vonatkoztatott TM polarizációjú síkhullám. Az \vec{E} vektor a beesési síkban, a \vec{H} vektor a $z = 0$ síkban fekszik.

a TEM síkhullám terére a Descartes koordinátákban a következő jól ismert képleteket kapjuk:

$$E_x(x, \vec{y}, z) = E_{x0}e^{-jk_z z}, \quad E_y(x, y, z) = E_{y0}e^{-jk_z z}, \quad E_z(x, y, z) = 0, \quad (3.33)$$

$$H_x(x, y, z) = -\frac{k_z}{\omega\mu}E_{y0}e^{-jk_z z}, \quad H_y(x, y, z) = \frac{k_z}{\omega\mu}E_{x0}e^{-jk_z z}, \quad H_z(x, y, z) = 0. \quad (3.34)$$

Vegyük észre, hogy $\frac{k_z}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z_0}$, ahol Z_0 a közeg hullámimpedanciája.

Láttuk, hogy – adott hullámvektor esetében – két skalár állandó elegendő a síkhullám elektromágneses terének leírására. Ezek a konstansok – az eddig tárgyalt E_{z0} és H_{z0} helyett – ferdén terjedő síkhullámok esetében is lehetnek pl. a tér egy pontjában (tipikusan az origóban) az elektromos tér x és y irányú rendezői, vagy a mágneses tér x és y irányú rendezői, vagy lehetnének éppen az elektromos és a mágneses tér x - vagy y -irányú rendezői is, stb. Példaként – hasonlóan a TEM hullámoknál leírtakhoz – válasszuk azt, hogy az $E_{x0} = E_x(x=0, y=0, z=0)$ és $E_{y0} = E_y(x=0, y=0, z=0)$ komplex konstansokat használjuk az EM tér leírásához. Ekkor (3.27) és (3.28) felhasználásával írhatjuk, hogy

$$E_{x0} = -\frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} - \frac{\omega\mu k_y}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0}, \quad (3.35)$$

$$E_{y0} = -\frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} + \frac{\omega\mu k_x}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0}. \quad (3.36)$$

A fenti egyenletekből kifejezve az E_{z0} és H_{z0} értékeket, majd visszahelyettesítve azokat a (3.27) - (3.32) egyenletekbe a síkhullám térkomponenseinek a következő kifejezését kapjuk:

$$E_x(\vec{r}) = E_{x0}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.37)$$

$$E_y(\vec{r}) = E_{y0}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.38)$$

$$E_z(\vec{r}) = \left(-\frac{k_x}{k_z} E_{x0} - \frac{k_y}{k_z} E_{y0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.39)$$

$$H_x(\vec{r}) = \left(-\frac{k_x k_y}{\omega\mu k_z} E_{x0} - \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega\mu k_z} E_{y0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.40)$$

$$H_y(\vec{r}) = \left(\frac{k_x^2 + k_z^2}{\omega\mu k_z} E_{x0} + \frac{k_x k_y}{\omega\mu k_z} E_{y0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.41)$$

$$H_z(\vec{r}) = \left(-\frac{k_y}{\omega\mu} E_{x0} + \frac{k_x}{\omega\mu} E_{y0} \right) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (3.42)$$

Vegyük észre, hogy ez utóbbi egyenletek már használhatók z -irányba terjedő, TEM síkhullám leírására is², ezzel szemben nem alkalmasak az xy síkban fekvő hullámvektorral ($k_z = 0$) leírható síkhullámok jellemzésére.

Emlékeztetünk arra, hogy a k_x, k_y, k_z számhármásra az egyetlen megkötésünk a (3.21) diszperziós egyenlet, ebből következően kettőt a három számból szabadon választhatunk meg, a harmadik pedig kiadódik. Gyakorlatban is fontos eset az, amikor k_x és k_y értékeit tetszőleges valósnak választjuk, ekkor k_z a (3.23) alapján valósnak, vagy tiszta képzetesnek adódik. A térvektorok (3.27)-(3.32) és (3.37)-(3.42) kifejezései természetesen igazak akkor

²(3.37)-(3.42) egyenletekből (3.33) és (3.34) megkapható a $k_x = k_y = 0$, $\vec{k} = k_z \vec{e}_z$ helyettesítéssel.

is, ha k_z tisztán képzetes. Ennek az esetnek az egyszerűbb értelmezése érdekében írjuk fel pl. (3.27) kifejezést ismét a $k_z = -j\alpha$ (α pozitív valós) jelölés bevezetésével:

$$E_x(x, y, z) = \left(\frac{j\alpha k_x}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} - \frac{\omega\mu k_y}{k_x^2 + k_y^2} H_{z0} \right) e^{-j(k_x x + k_y y)} e^{-\alpha z}. \quad (3.43)$$

Hasonló jellegű kifejezéseket kapunk a többi térkomponensre is.

Látható, hogy ebben az esetben már a terjedés irányának – az előzőekben megfogalmazott – értelmezése is nehézségbe ütközik. Az EM tér amplitúdója ugyanis a z -irányba exponenciálisan csökken, a $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$ irányban pedig változatlan (vegyük észre, hogy $|\vec{k}| \geq |\vec{k}| = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$). Az azonos fázisú síkok a \vec{k} vektorra merőleges síkok lesznek (emlékeztünk arra, hogy valós k_z esetén az azonos fázisú síkok a \vec{k} hullám vektorra merőlegesek). Összegzésként megállapíthatjuk, hogy képzetes k_z esetében egy z -irányban exponenciálisan csillapodó EM teret kapunk, amelyet továbbra is síkhullámnak nevezünk, tesszük ezt annak ellenére, hogy ennek az EM térnek a tulajdonságai sok szempontból különböznek a valós hullámvektor-komponensekkel rendelkező síkhullámok tulajdonságaitól. A képzetes k_z -vel leírt síkhullámokat a z irányban nem terjedőnek (z irányban eltűnőnek) szoktuk nevezni.

3.2. Síkhullámok által szállított teljesítmény

Induljunk ki a (3.27)-(3.32) képletekkel adott – a TE és TM polarizációjú síkhullámok szuperpozíciójaként előálló – síkhullámleírásból és feltételezzük, hogy a hullámvektor valós (azaz k_x , k_y és k_z , valós számok). A képletek segítségével felírhatjuk a komplex Poynting-vektort, amely a következő alakú lesz:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \left[\frac{1}{2} \frac{\omega\mu}{k_x^2 + k_y^2} |H_{z0}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega\epsilon}{k_x^2 + k_y^2} |E_{z0}|^2 \right] \vec{k}, \quad (3.44)$$

ahol a $*$ a komplex konjugáltat jelenti.

Amennyiben a síkhullám (3.37)-(3.42) kifejezésekkel adott leírásából indulunk ki, a komplex Poynting-vektor következő alakját kapjuk valós hullámvektor esetében:

$$\vec{S} = \frac{1}{2\omega\mu k_z^2} \left[(k_x^2 + k_z^2) |E_{x0}|^2 + (k_y^2 + k_z^2) |E_{y0}|^2 + 2k_x k_y \operatorname{Re} \{ E_{x0}^* E_{y0} \} \right] \vec{k}, \quad (3.45)$$

ahol $\operatorname{Re} \{ \cdot \}$ a komplex szám valós részét jelöli. Ebből az alakból származtatható az a speciális eset, amikor a síkhullám z -irányú (ebben az esetben ugyanis a (3.44) nem használható), ilyenkor – felhasználva a $k_x = 0$, $k_y = 0$, $\vec{k} = k_z \vec{e}_z = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \vec{e}_z$ azonosságokat – a következő kifejezést kapjuk:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \left[\frac{|E_{x0}|^2}{Z_0} + \frac{|E_{y0}|^2}{Z_0} \right] \vec{e}_z, \quad (3.46)$$

ahol $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ a közeg hullámellenállása.

A Poynting-vektorra kapott kifejezésekből – többek között – a következő megállapításokat olvashatjuk ki terjedő (azaz valós hullámvektorral leírható) síkhullámokra vonatkozóan:

- a Poynting-vektor a tér minden egyes koordinátájában azonos és véges nagyságú,
- a Poynting-vektor valós, tehát csak hatásos teljesítményáramlás van,
- a Poynting-vektor a hullámvektor irányába mutat, a síkhullámban tehát az energia terjedésének iránya egybeesik a terjedés irányával,
- ha egy síkhullámot TE és TM polarizációjú síkhullámokra bontunk, akkor ezekre igaz, hogy az egyes polarizációjú komponensek által szállított energia egymástól független, röviden ezt úgy szokták kifejezni, hogy a TE és TM polarizációjú síkhullámok ortogonálisak egymásra,
- mivel egy síkhullám által szállított energiasűrűség véges, ezért a teret kettéosztó végtelen síkon áthaladó teljesítmény végtelen, amennyiben a hullámvektornak van a síkra merőleges komponense is.

A Poynting-vektorra kapott (3.44)-(3.45) kifejezések módosulnak abban az esetben, amikor k_z képzetes. A $k_z = -j\alpha$ (α pozitív valós) jelölés felhasználásával a következő kifejezéseket kapjuk (vegyük észre, hogy $e^{-j(k_x x + k_y y - j\alpha z)} [e^{-j(k_x x + k_y y - j\alpha z)}]^* = e^{-2\alpha z}$):

$$\begin{aligned}
\vec{S} = & \vec{e}_x \left[\frac{1}{2} \frac{\omega \mu k_x}{k_x^2 + k_y^2} |H_{z0}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega \varepsilon k_x}{k_x^2 + k_y^2} |E_{z0}|^2 + \frac{j\alpha k_y}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} H_{z0}^* \right] e^{-2\alpha z} + \\
& \vec{e}_y \left[\frac{1}{2} \frac{\omega \mu k_y}{k_x^2 + k_y^2} |H_{z0}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\omega \varepsilon k_y}{k_x^2 + k_y^2} |E_{z0}|^2 + \frac{j\alpha k_x}{k_x^2 + k_y^2} E_{z0} H_{z0}^* \right] e^{-2\alpha z} + \\
& \vec{e}_z \left[\frac{1}{2} \frac{j\alpha \omega \mu}{k_x^2 + k_y^2} |H_{z0}|^2 - \frac{1}{2} \frac{j\alpha \omega \varepsilon}{k_x^2 + k_y^2} |E_{z0}|^2 \right] e^{-2\alpha z}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A kapott eredmény alapján a következő megállapításokat tehetjük a z -irányban eltűnő síkhullámokra vonatkozóan:

- a Poynting-vektor a z koordináta pozitív irányában exponenciálisan csökken, amíg a z koordináta negatív irányában exponenciálisan nő³,
- a Poynting-vektor z irányú rendezője tisztán képzetes, tehát a z irányban nincs hatásos teljesítményáramlás,
- a Poynting-vektor valós része (a hatásos teljesítményáramlás iránya) a z koordináta irányára merőleges, de nem feltétlenül esik egybe a $k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$ iránnyal,
- a síkhullám TE és TM polarizációjú komponensei által szállított energia egymástól nem független, a TE és TM polarizációjú síkhullámok ebben az esetben nem ortogonálisak egymásra,
- a z tengellyel párhuzamos végtelen síkokon áthaladó hatásos teljesítmény végtelen kivéve azt az egy síkot, amely magában foglalja a Poynting-vektort.

³Ebből a tulajdonságból látható, hogy az ilyen típusú síkhullám fizikailag csak z koordináták egy adott intervallumában, esetleg egy félig zárt intervallumában (a 3D-s tér szempontjából egy féltérben) létezhet, hiszen csak így képzelhető el, hogy mindenhol véges legyen a Poynting-vektor nagysága.

3.3. A síkhullám fizikai értelmezése és néhány gyakorlati alkalmazása

Az előző szakasz megállapításaiból is láthatjuk, hogy a síkhullám csak egy absztrakció, ilyen EM tér valójában nincs (nincs ugyanis végtelen hatásos teljesítményt szállító valószínű EM tér). Egy másik fontos elem, ami az előző kijelentést támasztja alá az, hogy nem is lehet értelmesen megfogalmazni olyan peremfeltételeket, amelyeket a síkhullám kielégít. Ezt már akkor is gyanítani lehetett, amikor kijelentettük, hogy síkhullám – irreális módon – végtelen teljesítményáramlással jár, hiszen az egyértelműséget – és így az egyértelműséghez szükséges peremfeltételeket – éppen energetikai megfontolások alapján bizonyítottuk. Látható, hogy a hullámvektor irányában a síkhullám ugyan kielégíti a sugárzási feltételt (végtelen térrészre vonatkozó peremfeltételt), de nem elégíti ezt ki a terjedésre merőleges és a terjedés irányával ellentétes irányokban, így ez a megoldás fizikailag nem létező elrendezéshez tartozik.

A fentiek ellenére a síkhullám a gyakorlatban előforduló terjedési problémák leírásának leginkább használt eszköze. Mindez azért van így, mert tetszőleges antenna (antennarendszer) távoli tere lokálisan síkhullámmal közelíthető. Ez azt jelenti, hogy az antennától kellően távol (az antenna befoglaló méreteinek és a hullámhossz nagyságának sokszoros távolságban) egy véges méretű, az antennát és a vizsgáló pontot összekötő sugárra merőleges sík felületen az EM tér úgy tekinthető, mintha az egy sugárirányba terjedő síkhullám lenne. (Az állítás könnyen belátható úgy, hogy figyelembe vesszük azt, hogy tetszőleges antenna Hertz-dipólusok szuperpozíciójaként előállítható és így annak távoli tere is a Hertz-dipólusok távoli terének szuperpozíciójaként áll elő.) A közelítés addig fogadható el egy sík felületen, amíg a felület egyes pontjainak antennától mért távolsága a hullámhossz töredékénél kisebb mértékben változik a teljes felületen⁴. Belátható, hogy nagy távolságban lévő antennák esetében ez a méret – még igen kicsiny hullámhosszak esetében is – jelentős lehet, pl. egy 10 km távolságban lévő, 3 GHz frekvencián működő antenna esetében ennek a véges síknak az oldalhosszúsága a 10 m-es nagyságrendbe esik.

Kézenfekvő, hogy az antennák távoli terének síkhullám közelítése alkalmazható abban az esetben is, amikor a véges sík nem merőleges az antennából indított sugárra, ebben az esetben a síkhullám terjedési iránya és a vizsgált felület normálisa nem egy irányba mutatnak. Ez az ún. ferdén beeső síkhullámok reflexiójának esetére vezet, ezt a jelenséget a továbbiakban részletesen vizsgálni fogjunk. Megállapíthatjuk tehát, hogy a mérnöki gyakorlatban vizsgált esetek igen nagy hányadában tekinthetjük a megvilágító teret lokálisan síkhullámnak, ez az oka annak, hogy a síkhullám-absztrakció részletes vizsgálata releváns.

A síkhullámokkal való beható foglalkozás másik oka az, hogy – a 3.5 pontban bemutatásra kerülő érvelés alapján – belátható, hogy minden homogén, forrásmentes tartományban kialakuló EM hullámteret fel lehet írni, különböző irányban terjedő síkhullámok szuperpozíciójaként. Ebből adódóan tehát a síkhullámokra kapott eredmények általánosíthatók. Ezek alapján pl. tetszőleges megvilágító EM hullám szóródását⁵ tekinthetjük úgy, mint a megvilágítást alkotó síkhullámok szóródásának szuperpozícióját.

⁴A hullámhossz töredéke alatt a mindenkor pontossági követelményeket figyelembe vevő értéket értünk, a $\lambda/32 \dots \lambda/16$ választás általában megfelelő.

⁵Szóródás alatt adott megvilágító EM hullámnak egy ismert objektum jelenléte hatására történő megváltozását értjük.

3.4. Ferdén beeső síkhullám viselkedése anyaghatáron

Tekintsünk két különböző anyagú félteret, amelyeket a $z = 0$ sík választ el egymástól. Mindkét közeg anyagának permeabilitása legyen μ_0 , az első közeg permittivitása legyen ε_1 , a másodiké ε_2 . Világítsa meg a határfelületet az első közegen terjedő, $\vec{k}_1^+ = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_{z,1} \vec{e}_z$ hullámvektorral leírt síkhullám. A megvilágítást egyértelműen megadtuk, ha – a (3.27)-(3.32) képletek szerinti leírást figyelembe véve – a hullámvektoron túl megadtuk a H_{z0} és E_{z0} komplex konstansokat. (Értelemszerűen, amennyiben a síkhullám (3.37)-(3.42) kifejezésekkel adott leírásából indulunk ki az E_{x0} és E_{y0} konstansokat kell ismernünk a megvilágítás egyértelmű megadásához.) Célunk az, hogy a megvilágító síkhullám ismeretében meghatározzuk a kialakuló EM teret.

3.4.1. A törési törvény

A síkhullám megvilágítás hatására a Maxwell-egyenletekből levezethető határfeltételeknek megfelelő EM tér fog kialakulni, ezek szerint az elválasztó sík mindkét oldalán az elektromos és mágneses térerősségek tangenciális komponenseinek egyelőnek kell lenniük.

A határfeltételekből következik, hogy a $z = 0$ sík mindkét oldalán ugyanolyan térbeli függvény szerint kell az elektromos és mágneses térnek változnia. Mivel a megvilágító síkhullám x és y szerinti térbeli függése $e^{-j(k_x x + k_y y)}$, így a két oldalon csak akkor lehetnek egyelőek a tangenciális komponensek ha mindkét oldalon az x és y szerinti függés $e^{-j(k_x x + k_y y)}$ alakú lesz⁶. Következésképpen csak síkhullámok lehetnek az egyes térrészekben, és a lehetséges síkhullámok hullámvektorainak x és y komponensei mindkét közegen ugyanazok: k_x és k_y , amelyek megegyeznek a megvilágító síkhullám hullámvektorának x és y komponenseivel. Az előzőekben láttuk, hogy amennyiben egy közegen k_x és k_y adott, k_z adódik a (3.21) egyenletből. k_z -re az első közegen két megoldás kapható, amelyek egymásnak ellentettjei, ezeket $+$ és $-$ felső indexekkel különböztetjük meg. Mivel a megvilágító síkhullám terjedő (valós hullámvektorral leírt) a lehetséges k_z értékek a következők:

$$k_{z,1}^+ = k_{z,1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k_x^2 - k_y^2}, \quad k_{z,1}^- = -k_{z,1} = -\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k_x^2 - k_y^2} = -k_{z,1}^+. \quad (3.48)$$

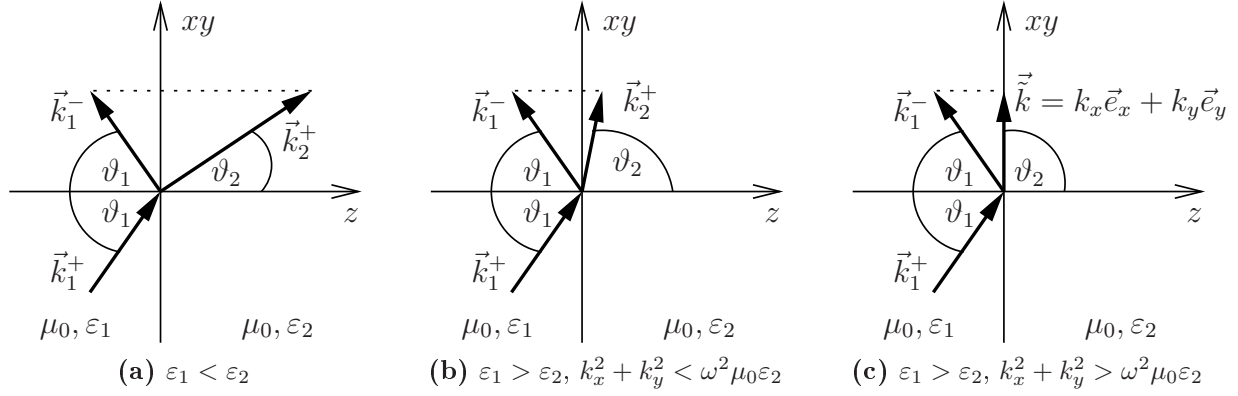
Látható, hogy az első közegen az eredeti megvilágító síkhullámon kívül kialakulhat még egy úgynevezett reflektált síkhullám is, amelynek hullámvektora: $\vec{k}_1^- = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y - k_{z,1} \vec{e}_z$. Mivel k_x és k_y értékek – a megvilágítás által – a második közegen is adottak az itt kialakuló síkhullámok hullámvektorainak z komponensei a következő értékeket vehetik fel:

$$k_{z,2}^\pm = \pm k_{z,2} = \pm \begin{cases} \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - k_x^2 - k_y^2}, & k_x^2 + k_y^2 \leq \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2, \\ -j \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2}, & k_x^2 + k_y^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2, \end{cases} \quad (3.49)$$

Mivel a második közeg a z -irányban végtelen és a végtelenből reflektált hullám a sugárzási feltétel miatt nem létezik, ezért a második közegen csak a pozitív előjellel kapott $k_{z,2}$ -nek megfelelő síkhullám alakul ki, azaz a második közegen egyedül a $\vec{k}_2^+ = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_{z,2} \vec{e}_z$ hullámvektorral leírható síkhullám lesz.

Amennyiben a (3.49) alapján $k_{z,2}$ valósan adódik, a második közegen terjedő síkhullám fog kialakulni, ekkor – mivel a síkhullám iránya nem lesz a megvilágító síkhulláméval

⁶Vegyük észre, hogy az elválasztó síkban $z = \text{konstans}$, így az EM tér z szerinti függésére a határfeltételek nem tesznek megkötést.



3.3. ábra. Ferdén beeső síkhullám visszaverődése és törése a két anyagot elválasztó $z = 0$ sík határfelületén a beesési síkban ábrázolva. Az xy tengely irányába mutató egységvektor: $\vec{e}_{xy} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \vec{e}_x + \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \vec{e}_y$ a hullámvektorok xy síkra eső vetületének irányába mutat.

egyező – *törésről* beszélünk. Ebben az esetben hatásos teljesítmény áramlik az elválasztó felületen keresztül a második közegbe. Ha viszont a (3.49) alapján $k_{z,2}$ képzetesnek adódik, a második közegben z irányba eltűnő síkhullám alakul ki, ilyenkor a *teljes visszaverődés* esete áll elő. Ekkor ugyanis hatásos teljesítmény nem fog átáramlani az első közegből a másodikba, így a hatásos teljesítmény csupán az xy síkkal párhuzamosan fog terjedni mindkét közegben.

A 3.3 ábrán a hullámvektorokat ábrázoltuk három különböző esetben. A 3.3a és 3.3b ábrákon törés esetét mutatjuk be, ahol a beeső és továbbhaladó síkhullámok hullámvektorainak a beesési merőlegessel bezárt szögeire (ϑ_1 és ϑ_2) az ismert Snellius–Descartes törési törvény érvényesül. Az elmondottakból ezt mi is könnyen levezethetjük, ha felhasználjuk, hogy

$$\sin \vartheta_1 = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}}, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}}, \quad (3.50)$$

és figyelembe vesszük, hogy $n_1 = \sqrt{\epsilon_{1r}}$ és $n_2 = \sqrt{\epsilon_{2r}}$ az egyes közegek törésmutatói, ahol ϵ_{1r} és ϵ_{2r} a közegek relatív permittivitását jelöli. Eredményként a (3.50) egyenletből a megszokott formájában adódik a törési törvény:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.51)$$

Ez a törvény természetesen csak akkor alkalmazható, amikor a második közegben is terjedő síkhullám alakul ki. A teljes visszaverődés esete – ezt mutatja a 3.3c ábra – akkor jelentkezik, ha a második közeg permittivitása (törésmutatója) kisebb az első közeg permittivitásánál és a megvilágító síkhullám beesési szöge nagyobb az $\vartheta_1^{kr} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ kritikus szögénél.

3.4.2. A reflektált és a továbbhaladó síkhullámok amplitúdójának meghatározása

A továbbiakban meghatározzuk a reflektált ($\vec{k}_{z,1}^-$ irányba haladó) és a második közegben továbbhaladó ($\vec{k}_{z,2}^+$ irányba terjedő) síkhullámok amplitúdóját a megvilágító síkhullám

($\vec{k}_{z,1}^+$ irányú) amplitúdójának ismeretében.

Első lépésként az egyszerűbb kifejezések érdekében írjuk át a síkhullám EM terének (3.27)-(3.32) képletekkel adott leírását új jelölésekkel. Mindenek előtt írjuk fel a $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$ hullámvektor rendezőit a gömbi koordináták $-\vec{k} = k \vec{e}_r + \vartheta \vec{e}_\vartheta + \varphi \vec{e}_\varphi$ - segítségével:

$$k_x = k \sin \vartheta \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \vartheta \sin \varphi, \quad k_z = k \cos \vartheta, \quad (3.52)$$

ahol $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ a hullámvektor abszolút értéke, ϑ a \vec{k} vektor z tengellyel bezárt szöge⁷, φ a \vec{k} vektor xy síkra vett vetületének x tengellyel bezárt szöge⁸. (A \vec{k} , ϑ és φ értelmezéséhez lásd még a 3.1a és 3.2a ábrákat.) Vezessük be továbbá az

$$E_{TE} = -\frac{\omega \mu}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} H_{z0} = -\frac{k}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} Z_0 H_{z0} = -\frac{1}{\sin \vartheta} Z_0 H_{z0}, \quad (3.53)$$

$$E_{TM} = -\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} E_{z0} = -\text{ctg } \vartheta E_{z0} \quad (3.54)$$

jelöléseket, ahol $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ a tér hullámimpedanciája. Végül vezessük be a következő impedancia jellegű mennyiségeket:

$$Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{k_z} = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{k_z} Z_0 = \frac{k}{k_z} Z_0 = Z_0 \frac{1}{\cos \vartheta}, \quad (3.55)$$

$$Z_{TM} = \frac{k_z}{\omega \varepsilon} = \frac{k_z}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} Z_0 = \frac{k_z}{k} Z_0 = Z_0 \cos \vartheta. \quad (3.56)$$

Megjegyezzük, hogy azok a kifejezések, amelyekben ϑ megjelenik, csak akkor használhatók, ha terjedő síkhullámról van szó. A z irányban eltűnő síkhullámok (képzetes k_z) esetében csak a k_z -t tartalmazó kifejezések használhatók. Megállapíthatjuk továbbá azt is, hogy a vizsgált feladatnál kialakuló síkhullámok hullámvektorainak ($\vec{k}_{z,1}^+$, $\vec{k}_{z,1}^-$, $\vec{k}_{z,2}^+$) φ szöge ugyanaz, mivel mindhárom hullámvektor a beesési síkban van.

A bevezetett jelölésekkel a síkhullám TE polarizációjú komponensének EM tere a következő alakban írható:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} E_{TE} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sin \varphi E_{TE} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.57)$$

$$E_y(\vec{r}) = -\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} E_{TE} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -\cos \varphi E_{TE} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.58)$$

$$E_z(\vec{r}) = 0, \quad (3.59)$$

$$H_x(\vec{r}) = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \cos \varphi \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.60)$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sin \varphi \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (3.61)$$

$$H_z(\vec{r}) = -\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_z} \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -\text{tg } \vartheta \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (3.62)$$

⁷ ϑ a síkhullám $z = \text{állandó}$ síkra vonatkoztatott beesési szöge is egyben, azaz $\cos \vartheta = \frac{k_z}{k}$

⁸ φ a beesési és a $z = \text{állandó}$ síkok metszészonalának az x tengellyel bezárt szöge, azaz $\text{tg } \varphi = \frac{k_y}{k_x}$

A síkhullám TM polarizációjú komponensének EM tere pedig a következő alakban írható:

$$E_x(\vec{r}) = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \cos \varphi E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.63)$$

$$E_y(\vec{r}) = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sin \varphi E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.64)$$

$$E_z(\vec{r}) = -\frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_z} E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\text{tg } \vartheta E_{TM} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.65)$$

$$H_x(\vec{r}) = -\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\sin \varphi \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.66)$$

$$H_y(\vec{r}) = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \cos \varphi \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.67)$$

$$H_z(\vec{r}) = 0. \quad (3.68)$$

Jelöljük a TE és TM polarizációjú síkhullám komponensek $z = 0$ síkba eső (azaz tangenciális) elektromos és mágneses térerősségeit rendre \vec{E}_t^{TE} , \vec{E}_t^{TM} , \vec{H}_t^{TE} , \vec{H}_t^{TM} szimbólumokkal, ezek kifejezése a (3.57)-(3.68) egyenletekből a következők:

$$\vec{E}_t^{TE} = \sin \varphi E_{TE} \vec{e}_x - \cos \varphi E_{TE} \vec{e}_y, \quad (3.69)$$

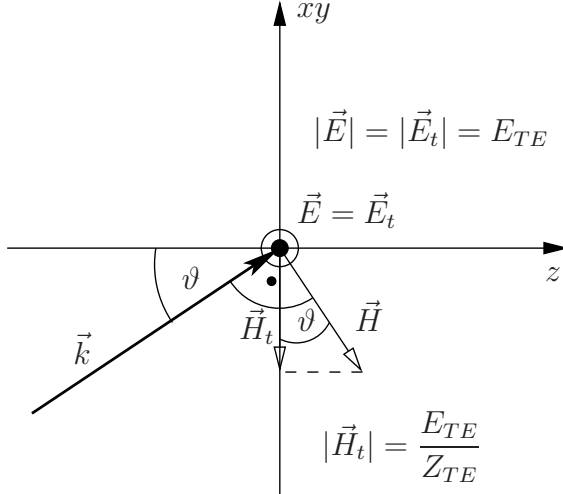
$$\vec{H}_t^{TE} = \cos \varphi \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} \vec{e}_x + \sin \varphi \frac{E_{TE}}{Z_{TE}} \vec{e}_y, \quad (3.70)$$

$$\vec{E}_t^{TM} = \cos \varphi E_{TM} \vec{e}_x + \sin \varphi E_{TM} \vec{e}_y, \quad (3.71)$$

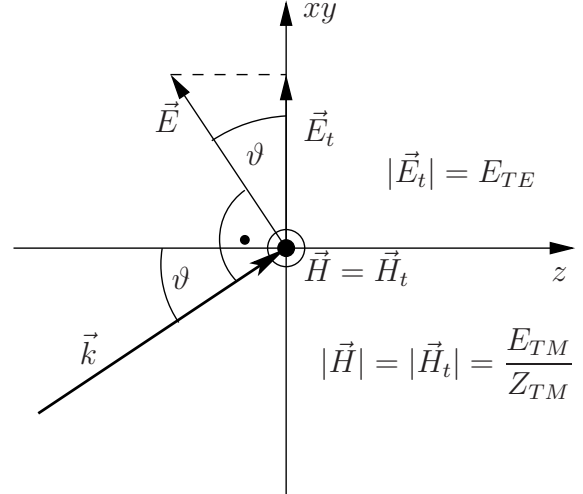
$$\vec{H}_t^{TM} = -\sin \varphi \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} \vec{e}_x + \cos \varphi \frac{E_{TM}}{Z_{TM}} \vec{e}_y. \quad (3.72)$$

A (3.57)-(3.72) egyenletek vizsgálata alapján a $z = 0$ síkban a térerősségekre vonatkozóan a következő fontos megállapításokat tehetjük (vegyük észre, hogy egy síkhullámban a $z = 0$ sík nem kitüntetett, így ezek a megállapítások hasonlóan megfogalmazhatók bármely $z = \text{állandó}$ síkban is):

- $|\vec{E}_t^{TE}| = E_{TE}$,
- $|\vec{E}_t^{TM}| = E_{TM}$,
- $|\vec{H}_t^{TE}| = \frac{1}{Z_{TE}} |\vec{E}_t^{TE}| = \frac{E_{TE}}{Z_{TE}}$,
- $|\vec{H}_t^{TM}| = \frac{1}{Z_{TM}} |\vec{E}_t^{TM}| = \frac{E_{TM}}{Z_{TM}}$,
- $\vec{E}_t^{TE} \cdot \vec{H}_t^{TE} = 0$,
- $\vec{E}_t^{TM} \cdot \vec{H}_t^{TM} = 0$,
- $\vec{E}_t^{TE} \cdot \vec{E}_t^{TM} = 0$,
- $\vec{H}_t^{TE} \cdot \vec{H}_t^{TM} = 0$.



(a) TE polarizációjú síkhullámot jellemző vektorok ábrázolása a beesési síkban



(b) TM polarizációjú síkhullámot jellemző vektorok ábrázolása a beesési síkban

3.4. ábra. Ferdén beeső, a $z = 0$ síkra vonatkoztatott TE és TM polarizációjú síkhullám jellemzésére használt jelölések magyarázata (itt az $|\cdot|$ jelölés a vektor hosszát és nem egy komplex szám abszolút értékét jelöli).

Szavakban a fenti megállapítások lényege egyrészt az, hogy az egyes polarizációjú síkhullámok \vec{E} és \vec{H} terének xy síkbeli komponensei merőlegesek egymásra, ezek hányadosa a Z_{TE} és Z_{TM} állandók. Másrészt pedig az, hogy az egyes polarizációk elektromos térerősségeinek tangenciális komponensei merőlegesek egymásra, hasonló megállapítás tehető a mágneses térerősségvektorokra is. A fenti megállapításokat szemlélteti a 3.4 ábra, amely segítségével a bevezetett jelölések egyszerűen értelmezhetők.

Ahogy azt már fentebb említettük, a vizsgált feladatban (ferdén beeső síkhullám viselkedése két különböző anyagjellemzőjű térrész határán) olyan EM tér alakul ki, amely eleget tesz a $z = 0$ síkban – a Maxwell-egyenletek által diktált – folytonossági feltételeknek, azaz az elektromos és mágneses tér tangenciális komponensei folytonosak a $z = 0$ síkban. Ebből a feltételből vezettük le a kialakuló síkhullámok hullámvektoraira vonatkozó (3.51) törési törvényt, a következőkben a síkhullámok amplitúdójára vonatkozó törvényt fogjuk felírni. Ezt a TE és TM polarizációjú síkhullám komponensekre külön-külön tehetjük meg, mivel láttuk, hogy a TE és TM polarizációk megfelelő térerősség-komponensei merőlegesek egymásra, továbbá a folytonossági feltételek nem változtatnak a tangenciális komponensek irányán, így a reflexiós probléma során a TE és TM polarizációjú hullámok nem csatolódnak egymással, következésképpen egymástól függetlenül kezelhetők.

Jelölje rendre $E_{TE,1}^+$, $E_{TE,1}^-$ és $E_{TE,2}^+$ a \vec{k}_1^+ , \vec{k}_1^- és \vec{k}_2^+ hullámvektorral leírt síkhullámok TE polarizációjú komponensének amplitúdóját. Ezek segítségével a TE polarizációjú síkhullámkomponensre vonatkozó folytonossági feltétel a $z = 0$ síkban a következő módon fejezhető ki:

$$E_{TE,1}^+ + E_{TE,1}^- = E_{TE,2}^+, \quad (3.73)$$

$$\frac{E_{TE,1}^+}{Z_{TE,1}} - \frac{E_{TE,1}^-}{Z_{TE,1}} = \frac{E_{TE,2}^+}{Z_{TE,2}}, \quad (3.74)$$

ahol $Z_{TE,1}$ a (3.55) egyenletből számítható az $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\mu = \mu_0$ és $k_z = k_{z,1}$ helyettesítéssel,

hasonlóan kapható meg $Z_{TE,2}$ az $\varepsilon = \varepsilon_2$, $\mu = \mu_0$ és $k_z = k_{z,2}$ felhasználásával. Vegyük észre, hogy a \vec{k}_1^- hullámvektorhoz tartozó síkhullám mágneses térerőssége $-\frac{E_{TE,1}^-}{Z_{TE,1}}$ értékű. Ez azért van így, mert a \vec{k}_1^- hullámvektor z irányú komponense ellentettje a \vec{k}_1^+ hullámvektor z irányú komponensének, ebből adódóan a (3.55) alapján számított értékek is ellentettjei lesznek egymásnak ($Z_{TE,1}$ a \vec{k}_1^+ hullámvektorhoz kiszámított érték)⁹.

A TM polarizációjú síkhullámkomponensekre a folytonossági feltétel a következő egyenletre vezet:

$$E_{TM,1}^+ + E_{TM,1}^- = E_{TM,2}^+ \quad (3.75)$$

$$\frac{E_{TM,1}^+}{Z_{TM,1}} - \frac{E_{TM,1}^-}{Z_{TM,1}} = \frac{E_{TM,2}^+}{Z_{TM,2}}, \quad (3.76)$$

ahol $E_{TM,1}^+$, $E_{TM,1}^-$ és $E_{TM,2}^+$ a \vec{k}_1^+ , \vec{k}_1^- és \vec{k}_2^+ hullámvektorral leírt síkhullámok TM polarizációjú komponensének amplitúdóját jelöli, valamint $Z_{TM,1}$ és $Z_{TM,2}$ értelemszerűen kapható a (3.56) kifejezésből.

Adott megvilágító síkhullám esetében a reflektált és a továbbhaladó síkhullám amplitúdóját úgy határozhatjuk meg, hogy felbontjuk a megvilágítást TE és TM polarizációjú komponensekre, azaz meghatározzuk $E_{TE,1}^+$ és $E_{TM,1}^+$ értékeit. (Ezt megtehetjük pl. a térerősségek z irányú komponenseinek ismeretében a (3.53), (3.54) képletek felhasználásával.) Ezeket felhasználva a (3.73)-(3.76) átrendezésével a következő eredményt kapjuk a reflektált és továbbhaladó síkhullámok TE és TM komponenseinek amplitúdójára:

$$E_{TE,1}^- = \frac{Z_{TE,2} - Z_{TE,1}}{Z_{TE,2} + Z_{TE,1}} E_{TE,1}^+, \quad E_{TE,2}^+ = \frac{2Z_{TE,2}}{Z_{TE,2} + Z_{TE,1}} E_{TE,1}^+, \quad (3.77)$$

$$E_{TM,1}^- = \frac{Z_{TM,2} - Z_{TM,1}}{Z_{TM,2} + Z_{TM,1}} E_{TM,1}^+, \quad E_{TM,2}^+ = \frac{2Z_{TM,2}}{Z_{TM,2} + Z_{TM,1}} E_{TM,1}^+. \quad (3.78)$$

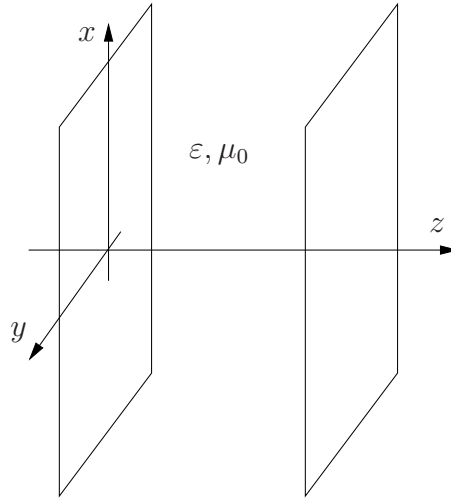
3.5. Elektromágneses hullámtér felbontása síkhullámok összegére

Tekintsünk a 3.5. ábrán látható, párhuzamos síkok által határolt homogén, lineáris és izotrop dielektrikummal kitöltött forrásmentes tartományt. Feltételezzük továbbá, hogy az EM tér időben ω körfrekvenciával szinuszosan változik és állandósult állapotban van, így a továbbiakban a térjellemzők komplex csúcértékeit használjuk a tér leírására. Az első és második Maxwell-egyenletből (3.1), (3.2) a mágneses térerősség kiküszöbölésével jutunk az elektromos térerősségre felírt homogén hullámeqyenletre:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (3.79)$$

ahol $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$.

⁹A 3.4a ábra alapján is látszik, hogy az ott ábrázolt \vec{k} vektorhoz tartozó reflektált síkhullám tangenciális mágneses tere ellentétes irányú lesz, amennyiben a reflektált síkhullám elektromos terének iránya megegyezik az ábrázolt \vec{k} vektorhoz tartozó elektromos térrel. Hasonló megállapítást tehetünk az előjel megfordulására a TM polarizációjú síkhullámokra vonatkozóan is.



3.5. ábra. Párhuzamos síkokkal határolt homogén térrész.

3.5.1. A térerősségvektorok térbeli Fourier-transzformáltja

Első lépésként bevezetjük a térerősségek térbeli Fourier-transzformáltját. Definiáljuk az \vec{E} elektromos térerősségvektor z irányú rendezőjének x változó szerinti térbeli Fourier-transzformáltját, és inverzét a következő módon:

$$\mathcal{F}_x \{E_z\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z e^{jk_x x} dx, \quad (3.80)$$

$$E_z = \mathcal{F}_x^{-1} \{ \mathcal{F}_x \{E_z\} \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_x \{E_z\} e^{-jk_x x} dk_x, \quad (3.81)$$

ahol k_x az x térbeli koordináta spektrumbeli párja¹⁰. Hasonlóan értelmezzük az y koordináta szerinti Fourier-transzformáltakat:

$$\mathcal{F}_y \{E_z\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z e^{jk_y y} dy, \quad (3.82)$$

$$E_z = \mathcal{F}_y^{-1} \{ \mathcal{F}_y \{E_z\} \} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_y \{E_z\} e^{-jk_y y} dk_y, \quad (3.83)$$

ahol k_y pedig az y térbeli koordináta spektrumbeli párja.

Egy vektor valamely irányú rendezőjének kétdimenziós térbeli Fourier-transzformáltja értelmezhető az egydimenziós transzformáltak alapján. A továbbiakban a (térbeli) Fourier-transzformáció alatt a *kétdimenziós* térbeli Fourier-transzformációt értjük. Az \vec{E} vektor z irányú rendezője x és y változók szerinti térbeli Fourier-transzformáltjának és inverzének

¹⁰Vegyük észre, hogy itt az idő szerinti Fourier-transzformáltaknál megszokotthoz képest felcseréltük a Fourier-transzformáció és annak inverzének definícióját. Ezt szabadon megtehetjük és erre azért van szükségünk, mert így tudjuk majd a térbeli Fourier-transzformált fizikai értelmezését egyszerűen megadni.

jelölése és értelmezése a következő:

$$\begin{aligned} E_z(k_x, k_y, z) &= \mathcal{F}_{xy} \{E_z(x, y, z)\} = \mathcal{F}_y \{ \mathcal{F}_x \{E_z(x, y, z)\} \} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(x, y, z) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= \mathcal{F}_{xy}^{-1} \{E_z(k_x, k_y, z)\} = \mathcal{F}_y^{-1} \{ \mathcal{F}_x^{-1} \{E_z(k_x, k_y, z)\} \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(k_x, k_y, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Analóg módon kaphatók meg az \vec{E} vektor x és y irányú rendezőinek térbeli Fourier-transzformáltjai is. Ezek segítségével értelmezhető magának a vektornak a térbeli Fourier-transzformáltja is a következő definícióval:

$$\vec{E}(k_x, k_y, z) = \mathcal{F}_{xy} \left\{ \vec{E}(x, y, z) \right\} = E_x(k_x, k_y, z) \vec{e}_x + E_y(k_x, k_y, z) \vec{e}_y + E_z(k_x, k_y, z) \vec{e}_z. \quad (3.86)$$

Az \vec{H} mágneses térerősség és más térvektorok transzformáltjai a bemutatott \vec{E} vektorhoz hasonlóan értelmezettek.

Használni fogjuk még a térbeli deriváltakra vonatkozó következő tételeket is (ezek egyszerűen adódnak a (3.81) és (3.83) képletekből):

$$\mathcal{F}_{xy} \left\{ \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right\} = -jk_x \vec{E}, \quad \mathcal{F}_{xy} \left\{ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \right\} = -jk_y \vec{E}. \quad (3.87)$$

3.5.2. A hullámgörvény megoldása térbeli Fourier-transzformációval

A Descartes-koordinátákban felírt (3.79) hullámgörvény Fourier-transzformáltját felírva a vektorok rendezőire és alkalmazva a (3.87) tételeket, három skalár változóra vonatkozó egyenletre jutunk:

$$-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0, \quad (3.88)$$

$$-k_x^2 E_y - k_y^2 E_y + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0, \quad (3.89)$$

$$-k_x^2 E_z - k_y^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0. \quad (3.90)$$

Ha felírjuk a $\text{div } \vec{E} = 0$ egyenlet z -szerinti deriváltjának Fourier-transzformáltját is:

$$-jk_x \frac{\partial E_x}{\partial z} - jk_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0, \quad (3.91)$$

akkor a (3.90) és (3.91) felhasználásával az E_z kifejezhető a másik két rendező Fourier-transzformáltjával a következő alakban:

$$E_z = -\frac{jk_x}{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{jk_y}{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (3.92)$$

Így az elektromos tér Fourier-transzformáltjának megadásához már csak E_x és E_y függvényeket kell meghatároznunk. Ezekre a (3.88) és (3.89) differenciálegyenletek vonatkoznak. Ha ezeket a következő alakban írjuk fel:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) E_x = 0, \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) E_y = 0, \quad (3.94)$$

azonnal látjuk, hogy megoldásuk a következő kifejezések lesznek:

$$E_x(k_x, k_y, z) = E_x^+(k_x, k_y) e^{-jk_z z} + E_x^-(k_x, k_y) e^{jk_z z}, \quad (3.95)$$

$$E_y(k_x, k_y, z) = E_y^+(k_x, k_y) e^{-jk_z z} + E_y^-(k_x, k_y) e^{jk_z z}, \quad (3.96)$$

ahol,

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}, & k^2 - k_x^2 - k_y^2 \geq 0 \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}, & k^2 - k_x^2 - k_y^2 \leq 0 \end{cases}. \quad (3.97)$$

$E_x^+(k_x, k_y)$, $E_x^-(k_x, k_y)$, $E_y^+(k_x, k_y)$ és $E_y^-(k_x, k_y)$ z -től független függvények, amelyeket a vizsgált térrész határoló síkjaiban előírt peremfeltételek határoznak meg. (3.92) felhasználásával kaphatjuk meg az elektromos tér z irányú rendezőjének Fourier-transzformáltját:

$$E_z(k_x, k_y, z) = -\frac{k_x}{k_z} [E_x^+ e^{-jk_z z} - E_x^- e^{jk_z z}] - \frac{k_y}{k_z} [E_y^+ e^{-jk_z z} - E_y^- e^{jk_z z}]. \quad (3.98)$$

Végül a második Maxwell-egyenlet (3.2) Fourier-transzformáltjának felhasználásával kifejezhetjük a mágneses térerősség kétdimenziós térbeli Fourier-transzformáltját is a következő alakban:

$$H_x(k_x, k_y, z) = -\frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} [E_x^+ e^{-jk_z z} - E_x^- e^{jk_z z}] - \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} [E_y^+ e^{-jk_z z} - E_y^- e^{jk_z z}], \quad (3.99)$$

$$H_y(k_x, k_y, z) = \frac{k_x^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} [E_x^+ e^{-jk_z z} - E_x^- e^{jk_z z}] + \frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} [E_y^+ e^{-jk_z z} - E_y^- e^{jk_z z}], \quad (3.100)$$

$$H_z(k_x, k_y, z) = -\frac{k_y}{\omega \mu} [E_x^+ e^{-jk_z z} + E_x^- e^{jk_z z}] + \frac{k_x}{\omega \mu} [E_y^+ e^{-jk_z z} + E_y^- e^{jk_z z}]. \quad (3.101)$$

Az elektromos és mágneses tér fenti kifejezéseire jellemző tehát, hogy a hat térkomponens négy k_x és k_y függő függvény segítségével (E_x^+ , E_x^- , E_y^+ , E_y^-) van kifejezve. A térkomponensek z szerinti függése ismert exponenciális. A (3.95), (3.96), (3.98)-(3.101) egyenletekkel adott rendezők inverz Fourier-transzformáltja adja az elektromos és mágneses teret a 3.5 ábrán látható homogén, forrásmentes térrészben. Az ilyen módon kapott leírást a hullámtanban az elektromágneses tér *síkhullámok szerinti felbontásaként* adott felírásának szokták nevezni.

3.5.3. Az EM hullámtér felírása

Összegezve az eddigieket, megállapíthatjuk, hogy a (3.95), (3.96), (3.98)-(3.101) kifejezések inverz Fourier-transzformáltjaként (3.85) az elektromos és mágneses tér minden rendezőjét megkaphatjuk a következő alakban:

$$E_\alpha(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\alpha^+(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\alpha^-(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z)} dk_x dk_y, \quad (3.102)$$

$$H_\alpha(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_\alpha^+(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_\alpha^-(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z)} dk_x dk_y, \quad (3.103)$$

ahol $\alpha = x, y$ vagy z . Az $E_x(x, y, z)$ és $E_y(x, y, z)$ térerősség-rendezők kifejezéséhez szükséges, az integrálok magjában szereplő $\mathbf{E}_x^+(k_x, k_y)$, $\mathbf{E}_x^-(k_x, k_y)$, $\mathbf{E}_y^+(k_x, k_y)$ és $\mathbf{E}_y^-(k_x, k_y)$ sűrűségfüggvényeket a vizsgált térrész határain adott peremfeltételek határozzák meg. Az $E_z(x, y, z)$, $H_x(x, y, z)$, $H_y(x, y, z)$ és $H_z(x, y, z)$ rendezők kifejezéséhez szükséges – a (3.102) és (3.103) integrálok magjában szereplő – további sűrűségfüggvények a (3.98)-(3.101) segítségével a következő alakban írhatók fel:

$$\mathbf{E}_z^+(k_x, k_y) = -\frac{k_x}{k_z} \mathbf{E}_x^+(k_x, k_y) - \frac{k_y}{k_z} \mathbf{E}_y^+(k_x, k_y), \quad (3.104)$$

$$\mathbf{E}_z^-(k_x, k_y) = \frac{k_x}{k_z} \mathbf{E}_x^-(k_x, k_y) + \frac{k_y}{k_z} \mathbf{E}_y^-(k_x, k_y), \quad (3.105)$$

$$\mathbf{H}_x^+(k_x, k_y) = -\frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_x^+(k_x, k_y) - \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_y^+(k_x, k_y), \quad (3.106)$$

$$\mathbf{H}_x^-(k_x, k_y) = \frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_x^-(k_x, k_y) + \frac{k_y^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_y^-(k_x, k_y), \quad (3.107)$$

$$\mathbf{H}_y^+(k_x, k_y) = \frac{k_x^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_x^+(k_x, k_y) + \frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_y^+(k_x, k_y), \quad (3.108)$$

$$\mathbf{H}_y^-(k_x, k_y) = -\frac{k_x^2 + k_z^2}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_x^-(k_x, k_y) - \frac{k_x k_y}{\omega \mu k_z} \mathbf{E}_y^-(k_x, k_y), \quad (3.109)$$

$$\mathbf{H}_z^+(k_x, k_y) = -\frac{k_y}{\omega \mu} \mathbf{E}_x^+(k_x, k_y) + \frac{k_x}{\omega \mu} \mathbf{E}_y^+(k_x, k_y), \quad (3.110)$$

$$\mathbf{H}_z^-(k_x, k_y) = -\frac{k_y}{\omega \mu} \mathbf{E}_x^-(k_x, k_y) + \frac{k_x}{\omega \mu} \mathbf{E}_y^-(k_x, k_y), \quad (3.111)$$

Megjegyezzük, hogy abban a gyakran előforduló speciális esetben, amikor az egyik irányból nem határolt a tartományunk (féltér esete), a szükséges sűrűségfüggvények száma felére csökken. Pl. abban az esetben, amikor a vizsgált térrész a pozitív z irányban végtelen, az $\mathbf{E}_x^-(k_x, k_y) = 0$ és $\mathbf{E}_y^-(k_x, k_y) = 0$ feltételek elégítik ki a sugárzási feltételt, így az elektromágneses tér csupán két sűrűségfüggvény, $\mathbf{E}_x^+(k_x, k_y)$ és $\mathbf{E}_y^+(k_x, k_y)$, segítségével leírható az egész féltérben.

Az (3.102) és (3.103) integrálok fizikai értelmezéséhez úgy juthatunk el, ha észrevesszük, hogy azok valójában $\vec{k}^+ = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$, illetve $\vec{k}^- = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y - k_z \vec{e}_z$ hullámvektorokkal jellemzett síkhullámoknak az adott sűrűségfüggvényekkel súlyozott szuperpozíciói. Amennyiben $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$, a (3.97) alapján k_z valós lesz, így az adott hullámkomponens terjedő hullámként, csillapítás nélkül halad a z irányba. Ha $k_x^2 + k_y^2 \geq k^2$, a k_z képzetes értéket vesz fel, és ez a z irányba exponenciálisan csillapodó síkhullámkomponenst jelent.

A levezetett formuláknak szemlélet szempontjából is van jelentősége. Az egyik fontos állítás az, hogy minden homogén, lineáris és forrásmentes anyagban kialakuló hullámteret fel tudunk írni síkhullámok spektrumaként, ezt pedig közelíteni tudjuk véges számú síkhullám szuperpozíciójával. Így az egyes síkhullámkomponensek terjedését, valamint a térrészt határoló falakon történő reflexióját külön-külön analizálhatjuk a 3.4 pontban leírtak alapján. Ennek eredményeként bonyolult hullámnyalábok terjedését és reflexióját egyszerűen számíthatjuk. Meg tudjuk mondani pl. azt is, hogy egy adott hullámnyaláb energiájának előállításában mely irányba terjedő síkhullámok, milyen súllyal vesznek részt. Ezen információk alapján az összetett hullámformák terjedési tulajdonságaira vonatkozóan szemléletes megfontolásokat tehetünk.

Hivatkozások

- [1] K. Simonyi, *Elméleti villamosságtan*, 8th ed. Budapest: Tankönyvkiadó, 1981.
- [2] W. C. Chew, M. S. Tong, and B. Hu, *Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves*. USA: Morgan & Claypool Publishers, 2009.
- [3] J. R. Bowler, S. A. Jenkins, L. D. Sabbagh, and H. A. Sabbagh, “Eddy-current probe impedance due to a volumetric flaw,” *Journal of Applied Physics*, vol. 70, no. 3, pp. 1107–1114, August 1991.
- [4] <http://www-civa.cea.fr/en/>, utolsó elérés: 2015. november 9.
- [5] <http://www-civa.cea.fr/en/partners/>, utolsó elérés: 2015. november 9.
- [6] C. V. Dodd and W. E. Deeds, “Analytical solution to eddy-current probe-coil problems,” *Journal of Applied Physics*, vol. 39, no. 6, pp. 2829–2838, May 1968.
- [7] C. T. Tai, *Dyadic Green’s functions in electromagnetic theory*. Scranton: Intext, 1971.
- [8] J. Pávó and K. Miya, “Reconstruction of crack shape by optimization using eddy current field measurement,” *IEEE Transaction on Magnetism*, vol. 30, pp. 3407–3410, September 1994.
- [9] S. Bilicz, J. Pávó, and Szabolcs Gyimóthy, “Calculation of eddy-current probe signal for a volumetric defect using global series expansion,” *COMPEL-The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 32, no. 5, pp. 1512–1524, 2013.
- [10] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*. New York: McGraw-Hill, 1961.